Solides de Platon

Définitions :

• Un polygone est dit convexe si toutes ses diagonales sont entièrement à l'intérieur de la surface délimitée par le polygone. Par exemple, le carré en est un, alors que les polygones en étoiles ne le sont pas.
• Un polyèdre est un solide délimité par des faces polygonales. Chaque côté de chaque polygone constituant une face coïncide avec un côté d'une autre face et chaque sommet est relié à un autre par une suite d'arêtes dont deux arêtes consécutives sont reliées par un sommet (par exemple les pyramides, prismes, parallélépipède...).
• Un polyèdre convexe est un polyèdre tel que toutes ses diagonales sont entièrement à l'intérieur du volume délimitée par le polyèdre.
• Un polyèdre régulier est un polyèdre inscriptible dans une sphère dont toutes les faces sont des polygones réguliers (triangle equilatéral, carré, pentagone régulier). Les polyèdre réguliers les plus connus sont le cube et le tetraèdre régulier, ces deux solides font parti d'un groupe de cinq solides appelés Solides de Platon (-427 ; -347), qui sont les cinq seuls polyèdre régulier convexes. Nous allons d'abord les découvrir puis dégager certaines propriétés et enfin montrer qu'il n'en existe que cinq (ce que fit Euclide(-320 ; -260)).

Recherches :

Les cinq solides de Platon sont : le tetraèdre, l'hexaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre, on considère bien sûr à chaque fois qu'ils sont réguliers (sinon, ce ne seraient pas des solides de Platon...).

1. Rechercher les significations des racines greques suivantes : tetra, hexa, octa, dodeca, icosa.
2. À partir de vos recherches, nommer les cinq solides (découpez les figures en fin de page).
3. Comment appelle-t-on habituellement l'hexaèdre ?

Propriété :

Partie A : Travail sur l'octaèdre régulier

1. Combien de faces a l'octaèdre régulier ?
2. Sur chaque face, combien y-a-t-il d'arêtes ?
3. On veut compter le nombre d'arêtes qu'il y a sur un octaèdre, sachant qu'on connait le nombre d'arêtes par faces et le nombre de faces, on peut presque répondre, il faut toutefois faire attention, car chaque arête est commune à deux faces, il faut donc multiplier le nombre de faces par le nombre d'arêtes par face, puis diviser par deux (étant donné que chaque arête est comptée deux fois).
   Calculer le nombre d'arêtes sur l'octaèdre.
4. En utilisant le même raisonnement que précédemment, calculer le nombre sommets de l'octaèdre.
5. Vérifier le résultat sur la figure.

Partie B : Généralisation
On désigne par A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces et S le nombre de sommets d'un polyèdre.

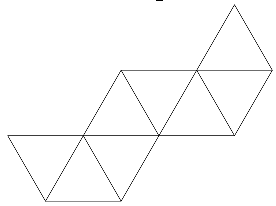
1. En utilisant la méthode décrite en partie A, compléter le tableau suivant :

	Tetraèdre	Hexaèdre	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
F					
A					
S					
$F+S-A$					

2. Que peut-on dire de la valeur $F + A - S$?

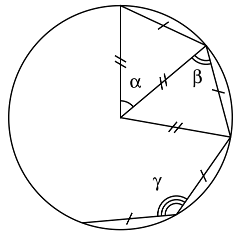
Nombre de solides de Platon :

On a vu lors des premières parties cinq polyèdre réguliers, on va montrer qu'il n'en existe que 5.



À partir du patron de l'octaèdre ci-contre, en regardant le sommet marqué, on remarque que la somme des mesures des angles est inférieure à 360°. Ce résultat est généralisé à l'ensemble des polyèdres convexes.

1. Dans un polygone régulier à n côtés, on va montrer que l'angle γ formé entre 2 côtés consécutifs est $180 - \dfrac{360}{n}$.
   La figure ci dessous représente une partie de polygone régulier, il est composé de n triangles isocèles identiques.



   (a) Exprimer α en fonction de n.
   (b) Exprimer β en fonction de n.
   (c) Exprimer γ en fonction de n.

2. À partir du résultat précédent, compléter le tableau suivant (on donnera le résultat à 1° près si nécessaire) :

Nombre de faces	3	4	5	6	7	8	9	10
Angle formé par 2 côtés consécutifs								

3. On sait qu'à chaque sommet se rejoigne au moins 3 faces (si il n'y en a que 2, cela ne forme pas de sommet...), on sait aussi que pour être régulier, un polyèdre doit posséder le même nombre de polygones réguliers en chacun de ses sommets. On veut calculer la somme des mesures des angles en 1 sommet dans différents cas (possibles ou non).
   Compléter le tableau suivant en utilisant le tableau précédent :

Nombre de faces / Nombre de faces en un sommet	3	4	5	6	7	8	9	10
3								
4								
5								
6								
7								

4. Sachant que la somme des mesures des angles est inférieure à 360°, mettre en valeur (en coloriant) dans le tableau les cas possibles. Combien y en a-t-il ?