Résolution d'équations du type $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

On sait factoriser les expressions du type $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) dans certaines conditions.
Il existe d'autres méthodes (plus complètes) pour déterminer si une expression de ce type est factorisable et pour la factoriser le cas échéant. On va déterminer cette méthode.

1. Montrer que $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$ (1).
   (On pourra développer puis réduire l'expression de droite pour arriver à l'expression de gauche.)
2. • On sait factoriser les expressions du type $A^2 - B^2$.
   • On sait aussi qui si un nombre n est positif alors on peut l'écrire comme le carré d'un nombre : $(\sqrt{n})^2 = n$; alors que si n est négatif on ne le peut pas.
   Dans la deuxième expression de l'égalité (1), il faut s'intéresser à la partie $\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$.
3. Si $\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) < 0$ alors on ne peut pas l'écrire comme étant le carré d'un nombre, on ne sait pas factoriser l'expression dans ce cas.
4. Par contre, si $\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) > 0$, alors $\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = \left[\sqrt{\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}\right]^2$.
5. Ce cas est intéressant car, en posant :
   $A = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ et $B = \sqrt{\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$, l'expression de droite de l'égalité (1) devient $a(A^2 - B^2)$!
   $$a(A^2 - B^2) = a(A - B)(A + B)$$
6. Tout suivi ? Alors on peut appliquer la méthode.

   Exemple 1 : Factoriser, si possible, $x^2 - 3x + 2$.

   • $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$. (Il faut calculer $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, pour déterminer le signe de $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.)
   • $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{(-3)^2 - 4(1)(2)}{4(1)^2} = \dfrac{9 - 8}{4} = \dfrac{1}{4} > 0$, on peut donc factoriser cette expression.
   • $A = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = \left(x + \dfrac{-3}{2 \times 1}\right) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ et $B = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$
   • $x^2 - 3x + 2 = 1\left[\left(x - \dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\right]\left[\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right]$
   $x^2 - 3x + 2 = \left(x - \dfrac{4}{2}\right)\left(x - \dfrac{2}{2}\right)$
   $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

   Exemple 2 : Factoriser, si possible, $x^2 - x + 2$.

   • $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
   • $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{(-1)^2 - 4(1)(2)}{4(1)^2} = \dfrac{1 - 8}{4} = \dfrac{-7}{4} < 0$, on ne peut pas factoriser cette expression (d'après 3.).
7. Factoriser, si possible, $4x^2 - 4x - 3$.
8. Factoriser, si possible, $x^2 - 2x - 2$.
9. Factoriser, si possible, $3x^2 - 4x + 2$.