

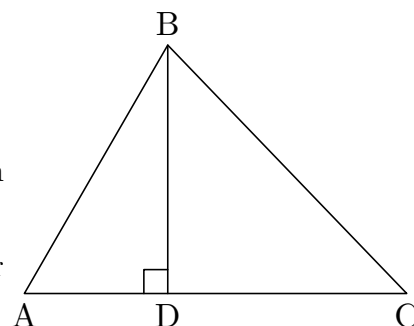
# THÉORÈME D'AL-KASHI

## PREMIÈRE PARTIE : PRÉLIMINAIRES

1. Tracer un triangle  $ABC$  tel que  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $AC = 8 \text{ cm}$  et  $\hat{A} = 60^\circ$ .
2. Tracer la hauteur issue de  $B$ , elle coupe  $[AC]$  en  $D$ .
3. Calculer  $AD$ , en déduire  $CD$ .
4. Calculer  $BD$  (on donne  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).
5. Calculer  $BC$ , puis en donner une valeur approchée au mm, et vérifier le résultat graphiquement.

## DEUXIÈME PARTIE : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'AL-KASHI

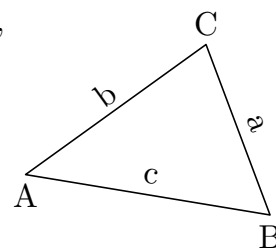
1. Montrer que  $AD = AB \times \cos \widehat{BAC}$  (penser que  $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$ ).
2. Exprimer  $CD$  en fonction de  $AC$ ,  $AB$  et  $\widehat{BAC}$
3. Montrer que  $BD = AB \times \sin \widehat{BAC}$ .
4. Exprimer  $BC^2$  en fonction de  $BD^2$  et de  $CD^2$ , puis en fonction de  $AB^2$ ,  $AC^2$  et  $\cos \widehat{BAC}$ .
5. En identifiant  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$  et  $\widehat{BAC} = \hat{A}$ , modifier le résultat précédent.



## TROISIÈME PARTIE : ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Soit un triangle tels que  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont ses trois côtés et tels que  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  sont, respectivement, les angles opposés à  $a$ ,  $b$  et  $c$ , alors :

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos \hat{A} \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos \hat{B} \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos \hat{C}\end{aligned}$$



Le théorème d'al-Kashi est également connu sous le nom de théorème de Pythagore généralisé, car le théorème de Pythagore en est un cas particulier : lorsque l'angle  $\hat{A}$  est droit, autrement dit lorsque  $\cos \hat{A} = 0$ , le théorème d'Al-Kashi s'écrit  $a^2 = b^2 + c^2$ .

## QUATRIÈME PARTIE : APPLICATIONS

1. Reprendre la figure de la première partie. Calculer  $BC$  directement, en utilisant le théorème d'Al-Kashi.
2. Calcul de longueur  
Soit  $MNP$  un triangle tel que  $MN = 4 \text{ cm}$ ,  $MP = 5 \text{ cm}$  et  $\hat{M} = 35^\circ$ .  
Calculer  $NP$ . Vérifier le résultat en traçant le triangle.
3. Calcul de la mesure d'un angle  
Soit  $FGH$  un triangle tel que  $FG = 5 \text{ cm}$ ,  $FH = 6 \text{ cm}$  et  $GH = 7 \text{ cm}$ .  
Calculer les mesures des trois angles du triangle.

## CINQUIÈME PARTIE : CALCUL DE L'AIRE D'UN TRIANGLE

Exprimer l'aire  $\mathcal{A}$  d'un triangle de côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$  (uniquement bien sûr).

Aide : à partir de la figure ci-contre exprimer  $h$  en fonction de  $d$  et de  $a$ , puis  $d$  en fonction de  $\cos \hat{A}$  et de  $a$  et enfin  $\cos \hat{A}$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$  (d'après les questions précédentes...) et enfin conclure...

