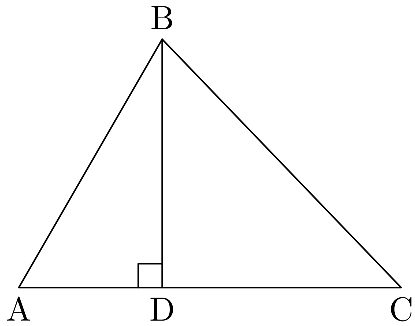
Théorème d'Al-Kashi

Première partie : Préliminaires

1. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 6\,cm$, $AC = 8\,cm$ et $\widehat{A} = 60^\circ$.
2. Tracer la hauteur issue de B, elle coupe $[AC]$ en D.
3. Calculer AD, en déduire CD.
4. Calculer BD (on donne $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).
5. Calculer BC, puis en donner une valeur approchée au mm, et vérifier le résultat graphiquement.

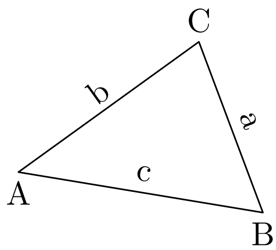
Deuxième partie : Démonstration du théorème d'Al-Kashi

1. Montrer que $AD = AB \times \cos\widehat{BAC}$ (penser que $\widehat{BAC} = \widehat{BAD}$).
2. Exprimer CD en fonction de AC, AB et $\widehat{BAC}$
3. Montrer que $BD = AB \times \sin\widehat{BAC}$.
4. Exprimer BC^2 en fonction de BD^2 et de CD^2, puis en fonction de AB^2 , AC^2 et $\cos\widehat{BAC}$.
5. En identifiant $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et $\widehat{BAC} = \widehat{A}$, modifier le résultat précédent.



Troisième partie : Énoncé du théorème

Soit un triangle tels que a, b et c sont ses trois côtés et tels que $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont, respectivement, les angles opposés à a, b et c, alors :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos\widehat{C}$$

Le théorème d'al-Kashi est également connu sous le nom de théorème de Pythagore généralisé, car le théorème de Pythagore en est un cas particulier : lorsque l'angle $\widehat{A}$ est droit, autrement dit lorsque $\cos\widehat{A} = 0$, le théorème d'Al-Kashi s'écrit $a^2 = b^2 + c^2$.

Quatrième partie : Applications

1. Reprendre la figure de la première partie. Calculer BC directement, en utilisant le théorème d'Al-Kashi.
2. Calcul de longueur
   Soit MNP un triangle tel que $MN = 4\,cm$, $MP = 5\,cm$ et $\widehat{M} = 35^\circ$.
   Calculer NP. Vérifier le résultat en traçant le triangle.
3. Calcul de la mesure d'un angle
   Soit FGH un triangle tel que $FG = 5\,cm$, $FH = 6\,cm$ et $GH = 7\,cm$.
   Calculer les mesures des trois angles du triangle.

Cinquième partie : Calcul de l'aire d'un triangle

Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de côtés a, b et c en fonction de a, b et c (uniquement bien sûr).
Aide : à partir de la figure ci-contre exprimer h en fonction de d, c et a (Pythagore), puis d en fonction de $\cos\widehat{A}$ et de b (expression du cosinus de l'angle $\widehat{A}$) puis $\cos\widehat{A}$ en fonction de a, b et c (d'après la 3[e]partie) et enfin conclure...