Bts Session 2008

durée : 1h

Exercice 1 : (*12 points*) **La solution particulière est donnée,** *bts mai, juin 2008*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

– Partie A - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - 2y = xe^x,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

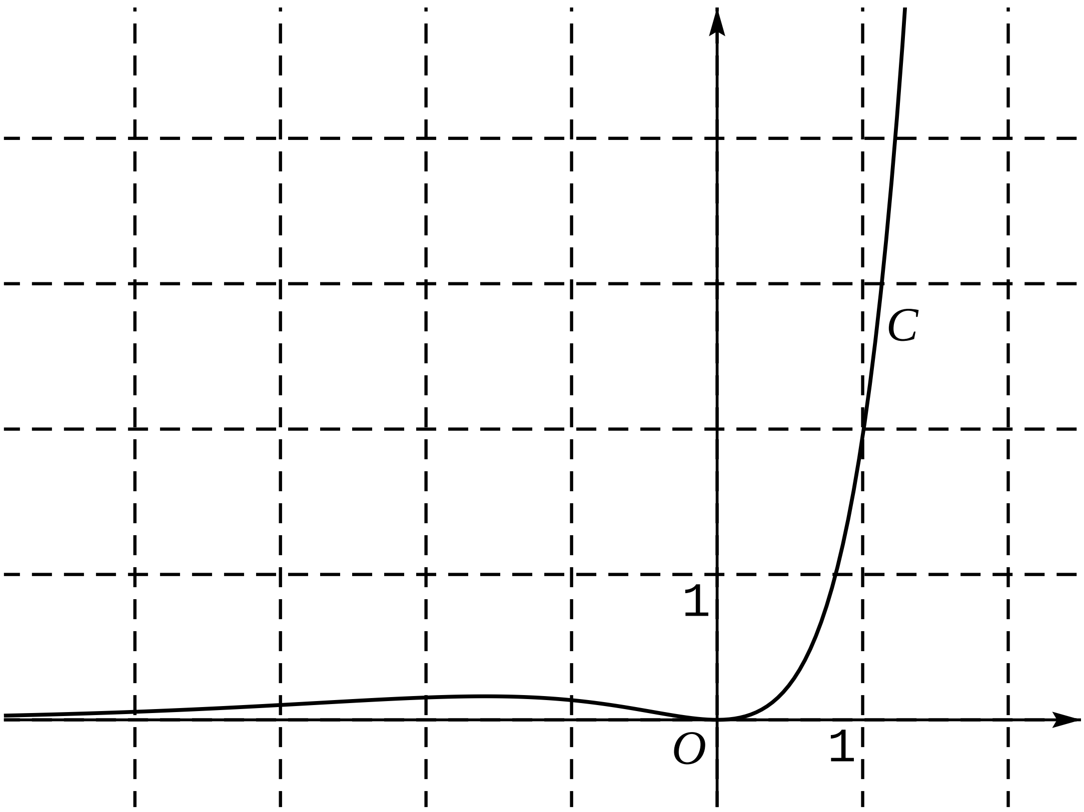
1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$(E_0) \qquad y' - 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x - 1)e^x$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

– Partie B - Étude locale d'une fonction –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$. Sa courbe représentative C est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. *a*) Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x).$$

b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.

d) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

– Partie C - Calcul intégral –

1. On note

$$I = \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,dx.$$

Démontrer que $I = 0,009$.

2. On note

$$J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x}\,dx.$$

Démontrer que $J = 0,5\left(e^{0,6} - e^{-0,6}\right)$.

3. On note

$$K = \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^{x}\,dx.$$

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(e^{0,3} - e^{-0,3}\right)$.

4. On note

$$L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,dx.$$

a) Déduire des questions précédente la valeur exacte de L.

b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des pièces encastrables,** *bts mai, juin 2008*

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique en grande série des pièces en bois. Ces pièces sont prévues pour s'encastrer les unes dans les autres.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.