Brevet de Technicien Supérieur, session 2007

Exercice 1 : (*11 points*) **Équation différentielle, étude de fonction,** *bts mai, session 2007*

A **1.** On a

$$y' + 710y = 0 \iff y' = -710y \iff \boxed{y(t) = ke^{-710t}, k \in \mathbb{R}}$$

2. On a immédiatement $h'(t) = 0$, donc $h' + 710h = 710$, ce qui prouve que $\boxed{h(t) = 1}$ est une solution particulière de (E).

3. Donc la solution générale de (E) est $\boxed{y(t) = 1 + ke^{-710t}, k \in \mathbb{R}}$.

4. On a $\varphi(0) = 1 + ke^0 = 1 + k$. La condition initiale $\varphi(0) = 0$ implique donc $k = -1$. D'où la solution cherchée $\boxed{\varphi(t) = 1 - e^{-710t}}$.

B **1.** On a $\boxed{\varphi'(t) = 710e^{-710t}}$. L'exponentielle étant toujours positive, on a alors donc $\varphi'(t)$ toujours positif, ce qui prouve que $\boxed{\varphi \text{ strictement croissante sur } [0; +\infty[}$.

2. *a*) On sait que

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) \qquad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$$

En posant $u = -710t$, il vient

$$e^{-710t} = 1 - 710t + \frac{710^2}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon(t) = 0$$

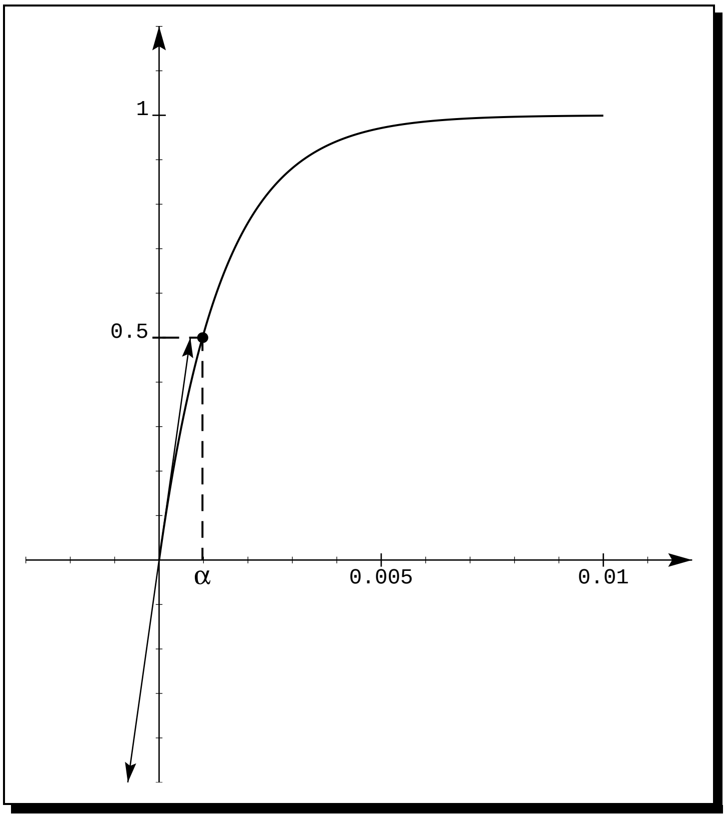
$$\text{soit} \quad \boxed{f(t) = 1 - e^{-710t} = 710t - \frac{710^2}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

b) Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 est donc $\boxed{y = 710t}$. Et comme la différence entre la courbe C et la tangente est donnée par l'expression

$$f(t) - 710t = -\frac{710^2}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon(t) = 0$$

et que cette expression est clairement $\boxed{\text{négative au voisinage de } 0}$ (puisque -710^2 est négatif et t^2 est positif), on en déduit que la courbe $\boxed{C \text{ est au dessous de sa tangente au voisinage de } 0}$.

3.



4. Il vient

$$\varphi(\alpha) = 0,5 \iff 1 - e^{-710\alpha} = 0,5$$
$$\iff e^{-710\alpha} = 0,5 \iff -710\alpha = \ln(0,5) \iff \boxed{\alpha = \frac{-\ln(0,5)}{710} \approx 9,7 \times 10^{-4}}$$

C **1.** Il vient :

$$I(t) = 710\int_O^t xe^{-710x}\,dx \qquad \text{on pose} \quad \begin{cases} U'(x) = e^{-710x} \\ V(x) = x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} U(x) = -\frac{e^{-710x}}{710} \\ V'(x) = 1 \end{cases}$$

d'où

$$I = 710 \times \left(\left[-\frac{xe^{-710x}}{710}\right]_0^t - \int_0^t -\frac{e^{-710x}}{710}\,dx\right) = 710 \times \left(-\frac{te^{-710t}}{710} - \left[\frac{e^{-710x}}{710^2}\right]_0^t\right)$$

$$\text{soit} \quad \boxed{I = -te^{-710t} - \frac{e^{-710t}}{710} + \frac{1}{710}}$$

2. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$ (*a priori* indéterminé, mais on sait qu'en l'infini, l'exponentielle l'emporte sur le polynôme), on a facilement $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = \frac{1}{710} \approx 0,001\,41}$

Exercice 2 : (*9 points*) **Ventilateurs...** *bts mai, session 2007*

A La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(30; 0,09)$ donc la variable T définie par $T = (X-30)/0,09$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

Il vient

$$\begin{aligned} p(29,8 \leqslant X \leqslant 30,2) &= p\left(\frac{29,8-30}{0,09} \leqslant \frac{X-30}{0,09} \leqslant \frac{30,2-30}{0,09}\right) \\ &= p\left(-\frac{20}{9} \leqslant T \leqslant \frac{20}{9}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{20}{9}\right) - 1 \approx 2\pi(2,22) - 1 \end{aligned}$$

soit $\boxed{p(29,8 \leqslant X \leqslant 30,2) \approx 0,937\,6}$.

B **1.** Nous avons **20 épreuves indépendantes**, chacune n'ayant que **2 issues possibles** (défectueuse ou non, de probabilités respectives $0,03$ et $0,97$). La variable Y compte les défectueuses, donc Y suit une $\boxed{\text{loi binomiale } \mathcal{B}(20;0,03)}$.

2. Il vient

$$p(Y=0) = C_{20}^{0} 0,03^{0} \times 0,97^{20} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Y=0) \approx 0,54}$$

3. Il vient

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y=0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Y \geqslant 1) \approx 0,46}$$

C **1.** La variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(400;0,5)$ donc la variable $\overline{T}$ définie par $\overline{T} = (\overline{Z} - 400)/0,5$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

On a alors l'équation

$$\begin{aligned} & p\left(400 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 400 + h\right) = 0,95 \\ \iff \quad & p\left(\frac{400 - h - 400}{0,5} \leqslant \frac{\overline{Z} - 400}{0,5} \leqslant \frac{400 + h - 400}{0,5}\right) = 0,95 \\ \iff \quad & p\left(-2h \leqslant \overline{T} \leqslant 2h\right) = 0,95 \\ \iff \quad & 2\Pi(2h) - 1 = 0,95 \quad \iff \quad \Pi(2h) = \frac{1,95}{2} = 0,975 \\ \iff \quad & 2h = 1,965 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h = 0,98} \end{aligned}$$

En conclusion, on a $\boxed{p(399,02 \leqslant \overline{Z} \leqslant 400,98) = 0,95}$.

2. La règle de décision est alors la suivante :

- On prélève de façon aléatoire et de manière indépendante un échantillon de 100 pièces et on calcule la moyenne $\overline{z}$ de ces hauteurs.
- Si $\overline{z} \in [399,02;400,98]$ on accepte l'hypothèse H_0 et on déclare la livraison conforme pour la hauteur.
- Si $\overline{z} \notin [399,02;400,98]$ on refuse l'hypothèse H_0 et on déclare la livraison non conforme pour la hauteur.

3. Ici $\overline{z} = 399,12$ donc $\overline{z} \in [399,02;400,98]$. On accepte l'hypothèse H_0 et on déclare la livraison conforme pour la hauteur au risque de 5%.