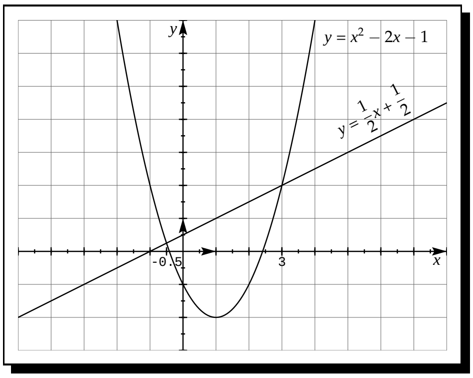
Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 : (*8 points*) **Résolutions d'équations et d'inéquations polynomiales**

1. *a*) Graphiquement, les solutions de l'équation $x^2-2x-1=0$ correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe $y=x^2-2x-1$ avec l'axe des abscisses $y=0$. On lit donc $\boxed{\text{2 solutions : } x_1 \approx -0,4 \text{ et } x_2 \approx 2,4}$.

b)



c) Graphiquement, les solutions de l'inéquation $x^2-2x-1 \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ correspondent aux abscisses des points de la parabole qui sont situés en-dessous des points de la droite $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Il y a donc un seul intervalle solution et $\boxed{S=[-0,5;3]}$

2. *a*) On résoud l'équation $x^2-2x-1=0$ en utilisant la méthode du discriminant. On trouve $\Delta=8$ d'où les deux racines réelles

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{x_1 = 1-\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \boxed{1+\sqrt{2}=x_2}$$

b) Il vient

$$x^2-2x-1 \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \iff x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \leqslant 0.$$

Et résoudre cette dernière inéquation revient à déterminer le signe du polynôme $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$. On utilise pour cela la méthode du discriminant. Il vient

$$\Delta = \frac{25}{4} + \frac{4\times 3}{2} = \frac{49}{4}$$

d'où les 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} = x_1} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{2} = \boxed{3 = x_2}$$

Le cours nous dit alors que le polynôme est du signe de $-a$ à l'intérieur de l'intervalle des racines, et du signe de a à l'extérieur de cet intervalle. Comme ici a est positif (puisque $a=1$), on en déduit que

$$x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \leqslant 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{2};3\right] \qquad \text{ce qui prouve que}$$

$$x^2-2x-1 \leqslant \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \iff \boxed{x \in \left[-\frac{1}{2};3\right]}$$

Exercice 2 : (*9 points*) **Coefficients indéterminés, intersection et positions relatives de deux courbes**

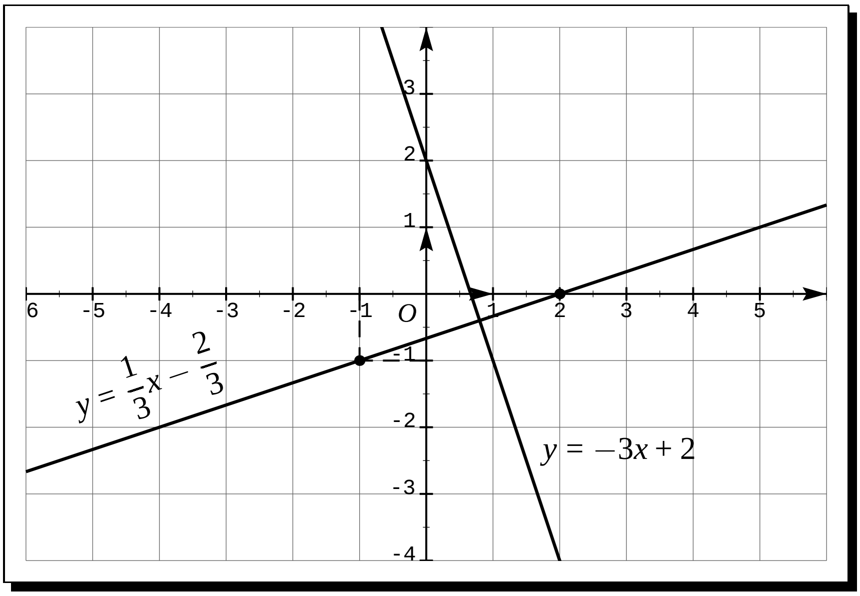
1. *a*) Graphiquement, on lit $\boxed{f(-1)=-1}$ et $\boxed{f(2)=0}$.

b) Comme $f(x)=ax+b$, la question précédente nous donne le système :

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}-a+b=-1\\2a+b=0\end{cases}\iff \begin{matrix}\\(2)-(1)\end{matrix}\begin{cases}-a+b=-1\\3a=1\end{cases}\iff\begin{cases}b=-1+1/3=-2/3\\a=1/3\end{cases}$$

soit $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}}$.

2.



3. Graphiquement, on a $f(x)=g(x)$ pour $\boxed{x\approx 0,8}$, et on a $f(x)\leqslant g(x)$ pour $\boxed{x\in\,]-\infty;0,8]}$.

4. *a*) Chercher l'intersection des courbes de f et g revient à résoudre le système

$$\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\end{cases}\iff\begin{cases}y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\y=-3x+2\end{cases}\iff\begin{cases}-3x+2=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\y=-3x+2\end{cases}\iff\begin{cases}-9x+6=x-2\\y=-3x+2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}8=10x\\y=-3x+2\end{cases}\iff\begin{cases}x=8/10=0,8\\y=-0,4\end{cases}\implies \boxed{\text{un point d'intersection : }(0,8;-0,4)}.$$

b) Étudier les positions relatives des courbes de f et g revient à étudier le signe de la différence $f(x)-g(x)$. Or

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}-(-3x+2)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+3x-2\quad\text{soit}\quad\boxed{f(x)-g(x)=\frac{10}{3}x-\frac{8}{3}}$$

d'où le tableau récapitulatif :

x	0		0,8		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		C_f au dessous de C_g		C_f au dessus de C_g	

Exercice 3 : (*3 points*) **Coefficients indéterminés**

Répondre au problème posé revient à résoudre le système :

$$\begin{cases}f(-1)=-4\\f(0)=-3\\f(1)=0\end{cases}\iff\begin{cases}a-b+c=-4\\c=-3\\a+b+c=0\end{cases}\iff\begin{matrix}(1)\\ \\(2)\end{matrix}\begin{cases}a-b=-1\\c=-3\\a+b=3\end{cases}\iff\begin{matrix}(1)+(2)\\ \\ \\\end{matrix}\begin{cases}2a=2\\c=-3\\a+b=3\end{cases}$$

d'où $(a,b,c)=(1,2,-3)$ et $\boxed{f(x)=x^2+2x-3}$.
