Études de fonctions rationnelles

Exercice 1 : Une fonction rationnelle simple

On considère la fonction f définie sur $I =]-10;1[\cup]1;10[$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

et on note C_f sa courbe représentative.

1. a) Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur I.

c) En déduire le tableau de variation de f.

2. On considère la droite Δ d'équation $y = 1$.

a) Déterminer l'intersection de la droite Δ avec la courbe C_f.

b) Étudier les positions relatives de C_f et Δ.

3. Déterminer une équation de T_1 et T_2, les tangentes respectives à la courbe C_f aux points d'abscisse 0 et 2.

4. représenter sur un même graphique les courbes Δ, T_1, T_2 et C_f.

Exercice 2 : Étude d'une fonction rationnelle

On considère C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2x}$$

et Δ la droite d'équation

$$y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f (autrement dit calculer sa dérivée f', étudier le signe de cette dérivée, et dresser le tableau des variations de f).

2. Représenter, dans un même repère orthonormal, les courbes C_f et Δ.

3. a) Déterminer graphiquement les points d'intersection de C_f et Δ.

b) Retrouver ces points d'intersection par l'algèbre.

c) Étudier les positions relatives de C_f et Δ.

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle

1. Soit C la courbe d'équation $y = \dfrac{2x+a}{x+b}$ où a et b sont des constantes réelles.

Déterminer les nombres a et b sachant que la courbe C passe par les points $B(-1,6)$ et $C(4,1)$.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-4}{x}$ et $\mathcal{H}$ sa courbe représentative.

a) Donner l'ensemble de définition de f (justifier).

b) Calculer l'expression de la fonction dérivée f'.

c) Étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variation de f.

d) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{H}$ et de la droite d'équation $y = 2$. En particulier, préciser le nombre de point(s) d'intersection.

e) Déterminer les coordonnées de A, le point d'intersection de la courbe $\mathcal{H}$ et de l'axe Ox.

f) Calculer une équation de T, la tangente à $\mathcal{H}$ au point A.

g) Montrer que $\mathcal{H}$ admet en un point D dont vous déterminerez les coordonnées, une autre tangente parallèle à T. Donner une équation de cette tangente.

h) Tracer ces tangentes et la courbe $\mathcal{H}$.