Devoir surveillé n° 9

durée : 2h

Exercice : Étude d'une fonction exponentielle

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie par $f(x) = x - \dfrac{x+1}{e^x}$ et le calcul d'une aire.

– Partie I –

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = e^x + x.$$

1. Déterminer les limites de $u(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Étudier le sens de variation de u et dresser son tableau de variation.

2. *a*) Démontrer que l'équation $e^x + x = 0$ n'admet sur $\mathbb{R}$ qu'une solution unique, que l'on notera α.

b) Démontrer que α appartient à $]-1, 0[$.

c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

3. De l'étude précédente, déduire le signe de $u(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.

– Partie II –

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \frac{x+1}{e^x}.$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

2. *a*) Calculer $f'(x)$.

b) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation (on utilisera la valeur approchée de α trouvé au **2.** du **I.** pour calculer une valeur approchée de $f(\alpha)$).

– Partie III –

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité : 2 cm.

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite D d'équation $y = x$ comme asymptote.

2. Soit g la fonction numérique définie par

$$g(x) = f(x) - x.$$

Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D. On précisera les coordonnées de leur point commun I.

3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en I.

4. Tracer avec soin dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les droites T et D ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.

– Partie IV –

1. Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

a) Déterminer les réels a et b de façon que la fonction h soit une primitive de la fonction g.

b) En déduire une primitive F de la fonction f.

2. Calculer la valeur exacte en cm^2, de l'aire de la partie E du plan limitée par la courbe et les droites d'équations $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$. On donnera une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près par défaut.