Devoir surveillé n° 8

durée : 2h

Exercice 1 : Équations avec une exponentielle

Rsoudre dans $\mathbb{R}$ les 2 équations suivantes :

$$a)\quad e^x = 3 \qquad\qquad b)\quad e^x = -2$$

Exercice 2 : Études de fonctions exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^x - e^{2x}.$$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 3 : Études de fonctions exponentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{e^x}.$$

1. Calculer la dérivée $g'(x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

Exercice 4 : Une étude facile, *bac F6*, *1993*

On considère la fonction numérique de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 4)e^x.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1. *a*) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme

   $$f(x) = 2xe^x - 4e^x.$$

2. *a*) Montrer que la dérivée f' de f peut s'écrire

   $$f'(x) = 2(x - 1)e^x.$$

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour x réel. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f en son point d'abscisse nulle.
4. Tracer la tangente T et la courbe C_f.
5. Soit F la fonction numérique de variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$F(x) = (ax + b)e^x \qquad \text{où} \qquad a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

   a) Calculer $F'(x)$.

   b) Déterminer a et b pour que $F(x)$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
6. Calculer la valeur exacte exprimée en cm^2 de l'aire de l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant

   $$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$$

   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.