Devoir surveillé nº 6

durée : 2h

Exercice : Étude d'une fonction logarithme *bac sti gm, juin 2002*

– Partie A – Étude du signe de $x^3 - 1 + 2\ln x$ –

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g. (Les limites ne sont pas demandées.)
3. Calculer $g(1)$.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

– Partie B – Courbe représentative d'une fonction et calcul d'aire –

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonam $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1. *a*) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$. Y a-t-il une autre asymptote à $\mathcal{C}$? Si oui donner son équation.

   c) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

   d) En utilisant les résultats de la partie **A** , déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

   e) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

   f) Tracer dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.

2. *a*) Montrer que la fonction H définie par :

   $$H(x) = -\frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

   est une primitive de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par :

   $$h(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

   b) Soit Δ le domaine plan limité par $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de Δ puis en donner une valeur approchée au mm^2 près.