Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 : (*10 points*) **posé au bac (***STI GM, 1996***)**

1. On a $|z_1| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ d'où $\cos\theta_1 = \sqrt{2}/2$ et $\sin\theta_1 = \sqrt{2}/2$. On en déduit $\theta_1 = \pi/4$. Finalement, on a

$$\boxed{z_1 = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}}$$

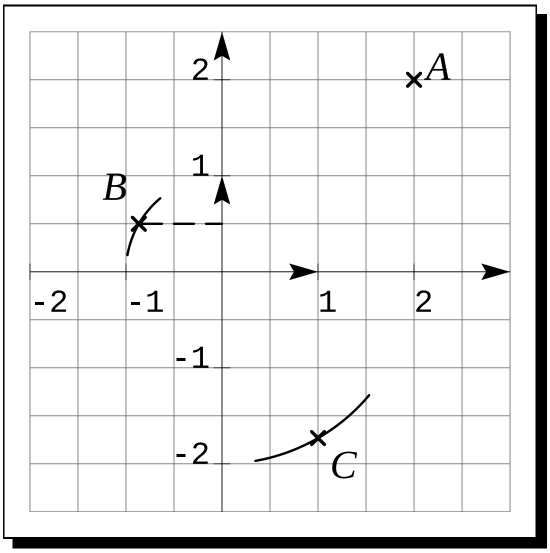
On lit immédiatement $|z_2| = 1$ et $\theta_2 = 5\pi/6$. Soit

$$\boxed{z_2 = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right] = e^{5i\pi/6}}$$

Et pour z_3 on trouve $|z_3| = \sqrt{1+4} = 2$, $\cos\theta_3 = 1/2$ et $\sin\theta_3 = -\sqrt{3}/2$. On en déduit

$$\boxed{z_3 = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{-i\pi/3}}$$

2.



3. *a*) On sait que $re^{i\theta} = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. On a donc facilement

$$\boxed{z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

b) En calculant ce produit sous forme algébrique, on trouve $z_1 \times z_2 = (2+2i) \times \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i) = (1+i) \times (-\sqrt{3}+i)$, soit $\boxed{z_1 \times z_2 = -\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)}$.

c) Et en reprenant ce calcul, mais sous forme trigonométrique, on trouve

$$z_1 \times z_2 = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[1, \frac{5\pi}{6}\right] = \left[1 \times 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right]$$

soit $$\boxed{z_1 \times z_2 = \left[2\sqrt{2}, \frac{13\pi}{12}\right] == 2\sqrt{2}e^{\frac{13i\pi}{12}}}$$

d) En identifiant ces deux derniers résultats, il vient

$$2\sqrt{2} \times \left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) = -\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)$$

d'où, en identifiant maintenant les parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

Exercice 2 : (*6 points*) **Calcul de valeurs moyennes**

1. Il vient

$$m_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos\Big]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{m_1 = \frac{2}{\pi}}$$

2. Il faut bien sûr linéariser $\cos^2 x$. Il vient :

$$m_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{m_2 = \frac{1}{2}}$$

3. Il nous faut calculer

$$m_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$$

On reconnaît une intégrale du type $\int -u'u^2$ avec $u = \cos x$. Une primitive sera $-\frac{1}{3}u^3$. Il vient alors

$$m_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{2}{\pi}\times\frac{-1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{m_3 = \frac{2}{3\pi}}$$

Exercice 3 : (*4 points*) **Du calcul**. . .

1. On a

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}.$$

D'où les nombres x et y cherchés :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. On a $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, soit $\boxed{|z| = 1}$. Donc $\cos\theta = 1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$. On en déduit qu'un argument de z est $\boxed{\theta = \pi/3}$.

3. En utilisant la forme trigonométrique de z, il vient

$$z^3 = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]^3 = [1^3, 3\times\frac{\pi}{3}] \quad \text{soit, sous forme exponentielle} \quad z^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi}$$

On a donc $\boxed{z^3 = [1,\pi] = e^{i\pi} = -1}$.
