

Bac blanc STL

durée : 3h

Exercice 1 : (5 points) Résolution d'équations

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$.

- Calculer $P(1)$.
- Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout x réel, on ait :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

- Déduire des questions précédentes que les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont 1, -1 et 5.
- Résoudre en utilisant les résultats précédents :
 - $(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 5 = 0$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x ;
 - $e^{3x} - 5e^{2x} - e^x + 5 = 0$.

Exercice 2 : (5 points) Complexes et géométrie

Tous les résultats seront justifiés.

On considère les nombres complexes

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = -z_1 \quad z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

où \bar{z}_1 désigne le nombre complexe conjugué de z_1 .

- Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 .
- Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3 .
- a) Montrer que

$$z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

- En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4 .
- Quelle est la forme algébrique de z_4 ?

Exercice 3 : (10 points) Étude d'une fonction comportant un logarithme

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x + 2 + \ln x}{x}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est tracée sur la feuille ci-jointe (à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie).

– Partie I – Étude de la fonction f –

- Déterminer graphiquement la limite de f en 0 (aucun calcul n'est demandé).
- a) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C . Donner son équation et la tracer sur la feuille ci-jointe.
- a) Prouver que, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

- Étudier le signe de $f'(x)$, et montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $1/e$.
- Établir le tableau de variation de f . Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f .

– Partie II – Position relative de deux courbes –

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x+2}{x}$$

et H la courbe représentative de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Calculer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
 - Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
 - En déduire le tableau de variation de la fonction g .
2. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H .
3. a) Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.
b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.
c) Étudier la position relative des deux courbes C et H .
4. Placer le point K et construire la courbe H sur la feuille ci-jointe.

– Partie III – Calcul d'une aire –

On note A l'aire du domaine plan limité par les courbes C et H et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.

- Hachurer l'aire correspondante sur le graphique (feuille ci-jointe) à rendre avec la copie.
- Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2.$$

Vérifier que u est une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

- Calculer A en cm^2 .

