Bac blanc STI

durée : 4h

Exercice 1 : (*4 points*) **Résolution d'équations**

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$.

1. Calculer $P(1)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel, on ait :

$$P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

3. Déduire des questions précédentes que les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont 1, -1 et 5.

4. Résoudre en utilisant les résultats précédents :

a) $(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 5 = 0$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x ;

b) $e^{3x} - 5e^{2x} - e^x + 5 = 0$.

Exercice 2 : (*5 points*) **Complexes et géométrie**

Tous les résultats seront justifiés.

On considère les nombres complexes

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \qquad z_2 = \overline{z_1}, \qquad z_3 = -z_1 \qquad z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.

3. *a*) Montrer que

$$z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.

c) Quelle est la forme algébrique de z_4 ?

4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.

a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.

b) Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.

c) Calculer les distances AC et BD.

d) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 3 : (*11 points*) **Étude d'une fonction comportant un logarithme**

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x + 2 + \ln x}{x}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est tracée sur la feuille ci-jointe (**à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie**).

– Partie I – Étude de la fonction f –

1. D'après le graphique, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C. Le prouver par le calcul.

2. *a*) Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la feuille ci-jointe.

3. *a*) Soit f', la fonction dérivée de la fonction f. Prouver que, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$, et montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$.

c) Établir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

– Partie II – Position relative de deux courbes –

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x+2}{x}$$

et H la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Calculer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.

b) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

c) En déduire le tableau de variation de la fonction g.

2. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H.

3. *a*) Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.

b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.

c) Étudier la position relative des deux courbes C et H.

4. Placer le point K et construire la courbe H sur la feuille ci-jointe.

– Partie III – Calcul d'une aire –

On note A l'aire du domaine plan limité par les courbes C et H et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.

1. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique (feuille ci-jointe) à rendre avec la copie.

2. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2.$$

Vérifier que u est une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer A en cm^2.

NOM :

Feuille annexe (à rendre avec la copie)