Brevet de Technicien Supérieur

Session 1998

Épreuve de mathématiques

<u>durée</u> : 2h

Spécialités : Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Conception et réalisation de carrosseries, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade–étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance et exploitation des matériels aéronautiques, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Traitement des matériaux, Travaux publics.

Exercice 1 : (*11 points*) **Une usine de plaquettes,** bts mai**,** *1998*

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-2} près.

Une entreprise fabrique des plaquettes dont la longueur et la largeur sont mesurées en mm.

– Partie A –

Sur un échantillon de 100 plaquettes, on a mesuré la longueur de chaque plaquette et obtenu le tableau suivant :

Longueur	$[35, 37[$	$[37, 39[$	$[39, 41[$	$[41, 43[$	$[43, 45[$
effectif	3	25	50	20	2

1. On veut calculer une valeur approchée de la moyenne m et de l'écart type s de l'échantillon. Pour cela, on fait comme si toutes les observations d'une classe étaient situées au centre de la classe. Calculer m et s. Compte tenu de l'erreur de méthode induite par l'approximation précédente, les résultats seront donnés à 10^{-1} près.

2. On suppose que la variable aléatoire L qui à chaque plaquette associe sa longueur suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $1,6$.

a) Donner une estimation ponctuelle de μ.

b) Déterminer un intervalle de confiance à 95% de μ centré sur la valeur obtenue précédemment.

– Partie B –

On suppose dans cette partie que L suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type $1,6$ et que la largeur ℓ suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type $1,2$.

1. On tire une plaquette au hasard dans la production.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une longueur comprise entre 37 et 43 mm ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une largeur comprise entre 22 et 28 mm ?

2. Une plaquette est acceptée si sa longueur est comprise entre 37 et 43 mm et sa largeur est comprise entre 22 et 28 mm.

En admettant que L et ℓ sont des variables aléatoires indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée ?

– Partie C –

La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit rejetée est égale à $0,07$.

On appelle X la variable aléatoire qui à un lot de 100 plaquettes extraites de la fabrication associe le nombre de plaquettes rejetées contenues dans ce lot.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres et son espérance mathématique.

2. En admettant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson, préciser son paramètre.

Quelle est alors la probabilité d'obtenir strictement moins de 10 plaquettes rejetées dans un lot de 100 plaquettes ?

Exercice 2 : (*9 points*) **Transformée de Laplace et équation différentielle,** bts mai**,** *1998*

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction f telle que

a) $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

b) $f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = e^{-t}$ pour $t > 0$.

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

– Partie A – Détermination de la transformée de Laplace de f –

Nous allons utiliser la transformée de Laplace pour résoudre cette équation différentielle. Pour cela, nous admettons que f et ses dérivées premières et seconde admettent des transformées de Laplace. On note F la transformée de f. ($F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$).

> **Remarque** – Je vous ai recopié *texto* l'énoncé de l'examen. Avec les notations habituelles utilisées en cours, le contenu de la dernière parenthèse serait plutôt : $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$.

1. Calculer en fonction de $F(p)$:

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right], \qquad \mathcal{L}\left[f'(t)\right], \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}\left[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)\right],$$

2. Calculer $\mathcal{L}\left[e^{-t}U(t)\right]$ où U est l'échelon unité.

3. En déduire $F(p)$.

– Partie B – Détermination de f –

1. Vérifier que

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+2},$$

puis montrer que

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

2. Déduire du résultat précédent l'expression de $f(t)$ pour t positif.