Brevet de Technicien Supérieur

durée : 2h

Session 1997

Exercice 1 : (*12 points*) **Équation différentielle d'ordre 2,** *bts mai, session 1997*

– Partie A - résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle (E) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(E) \qquad y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}.$$

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation (E ') :

$$(E') \qquad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

2. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x}$ soit solution de l'équation (E).

3. *a*) Déduire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).

b) Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point $S(0;2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

– Partie B - Étude d'une solution particulière de l'équation différentielle (E) –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2e^{2x}(1-2x).$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ; unité graphique : 2 cm.

1. *a*) Étudier la limite de f en $+\infty$

b) Étudier la limite de f en $-\infty$.

En déduire que C admet une asymptote (que l'on précisera). Préciser la position de C par rapport à cette asymptote.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer la courbe C.

4. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$. Donner la valeur de cette aire arrondie au mm^2.

Exercice 2 : (*8 points*) **Des pièces en série. . . ,** *bts mai, session 1997*

Une entreprise fabrique en série des pièces dont le diamètre, mesuré en millimètres, définit une variable aléatoire D.

On admet que cette variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

1. *Estimation de m et σ :*

a) Un échantillon de 100 pièces est prélevé au hasard dans la production. Les mesures des diamètres des pièces de cet échantillon son regroupées dans le tableau suivant :

Mesures des diamètres (en mm)	$[4,0;4,2[$	$[4,2;4,4[$	$[4,4;4,6[$	$[4,6;4,8[$	$[4,8;5,0[$
effectif	6	24	41	25	4

En faisant l'hypothèse que, pour chaque classe, les valeurs mesurées sont égales à celle du centre de la classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne d et l'écart type s de cet échantillon.

En déduire l'estimation ponctuelle de σ fournie par cet échantillon.

b) On appelle $\overline{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 pièces, associe la moyenne des diamètres des pièces de l'échantillon.

On rappelle que $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma/10$.

Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m de D au seuil de confiance de 95%.

2. Dans cette question, on admet que la production comporte 5 % de pièces inutilisables.

a) L'entreprise conditionne ses pièces par boîtes de 25.

On tire une boîte au hasard (on assimilera cette épreuve à un tirage successif avec remise de 25 pièces dans la production).

On désigne par K le nombre de pièces inutilisables dans cette boîte.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire K ?

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que cette boîte contienne au plus une pièce inutilisable.

b) Un client qui a besoin de 185 pièces commande 8 boîtes de pièces (on assimile cette épreuve à un tirage successif et avec remise de 200 pièces dans la production).

On désigne par L le nombre de pièces inutilisables dans cette commande. On admet que L suit la loi de Poisson de paramètre 10.

Quelle est la probabilité que le client dispose d'un échantillon suffisant de pièces utilisables dans sa commande ?