Brevet de Technicien Supérieur

durée : 2h

Session 1996

Exercice 1 : (*8 points*) **Calcul d'un moment d'inertie,** *Bts maintenance industrielle***,** 1996

Les parties **I** *et* **II** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

– Partie I - Résolution d'une équation différentielle –

On considère l'équation différentielle

(E) $$(1+t^2)x' + 2tx = 0$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la fonction f, solution particulière de l'équation (E), vérifiant $f(0) = 1$.

– Partie II - Calcul intégral –

On pose

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt, \qquad B = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad \text{et} \qquad C = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt,$$

1. *a*) Montrer que $A = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $B = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

2. *a*) Vérifier que, pour tout nombre réel t, on a

$$\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

b) Déduire du **1.** la valeur exacte de C.

– Partie III - Application –

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 1$.

Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation $t = 1$ est donné par

$$M = \int_0^1 (1-t)^2 f(t)\,dt.$$

1. Montrer que $M = A - 2B + C$.

2. À l'aide de la partie **II**, calculer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près de M. (Le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas demandé.)

Exercice 2 : (*12 points*) **Statistiques inférentielles : un problème de synthèse.** *Bts Maintenance industrielle, 1996*

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

– Partie I –

La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie moyenne exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

1. Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à 10^{-4} près la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.

2. On admet que $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.

a) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.

b) Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement : « *il y a au plus trois moteurs non commercialisables* ».

– Partie II –

La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultats obtenus sont les suivants :

durée de vie	$[300, 340[$	$[340, 380[$	$[380, 420[$	$[420, 460[$	$[460, 500[$
Effectifs	7	21	48	16	8

1. En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires, contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats $m_2 = 406,8$ et $\sigma_2 = 40,5$.

2. On désigne par $\overline{X_1}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne, et par $\overline{X_2}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne.

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variables aléatoires $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $D = \overline{X_1} - \overline{X_2}$ suivent des lois normales de moyennes respectives M_1, M_2, $M_1 - M_2$ inconnues, et on estime l'écart type de D par

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}}.$$

(On prend comme valeur approchée à 10^{-1} près de σ_1 la valeur 39, 4.)

On décide de construire un test bilatéral permettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.

On choisit pour hypothèse $H_0 : M_1 = M_2$, et pour hypothèse alternative $H_1 : M_1 \neq M_2$.

a) Sous l'hypothèse H_0, D suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_D)$. Déterminer l'intervalle $[-h, h]$ tel que $P(-h \leqslant D \leqslant h) = 0,95$.

b) Énoncer la règle de décision du test.

c) Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.