Brevet de Technicien Supérieur

durée : 2h

Session 1995

Exercice 1 : (*8 points*) **Des glaces !** bts mai**,** *1995*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir et emballer des cônes de glace.

– Partie A –

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de glace qu'il contient. On suppose que X suit la loi normale de paramètres $m = 100$ et σ.

1. Dans cette question, $\sigma = 2\sqrt{2}$.

On choisit au hasard un cône rempli de glace. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la masse qu'il contient soit comprise entre 95 g et 105 g.

2. Un cône est considéré comme « bon » lorsque la masse de glace qu'il contient appartient à l'intervalle $[95\,;\,105]$. Déterminer la valeur du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « *le cône est bon* » soit égale à $0,95$ (on donnera le résultat avec deux décimales).

– Partie B –

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.

On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,000\,5$.

On nomme Z la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans le lot.

1. Quelle est la loi suivie par Z ?

2. On admet que la loi de Z peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre de cette loi.

b) Si un client reçoit un lot contenant au moins 5 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de ce lot.

Calculer la probabilité qu'un lot soit inchangé.

Exercice 2 : (*12 points*) **Étude d'un système de sécurité,** *bts mai***,** *1995*

Principe du fonctionnement (voir schémas ci-dessous).

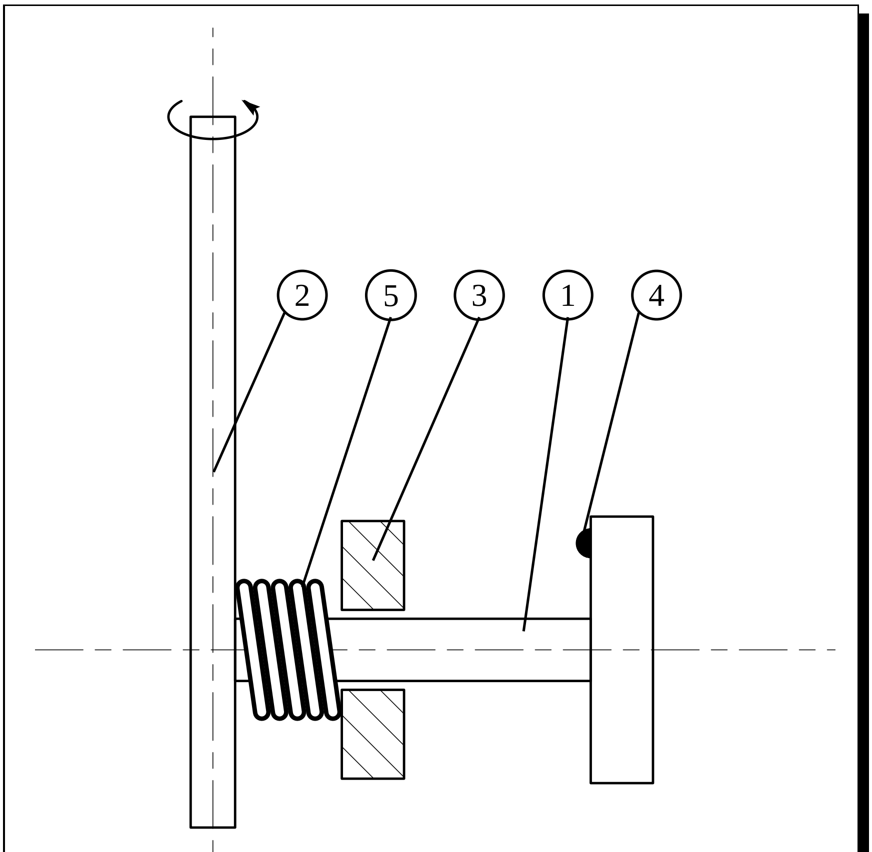

Schéma A

Une tige horizontale (1) de longueur ℓ est solidarisée perpendiculairement à un arbre (2) d'une machine tournant à une vitesse angulaire constante ω. Un ressort (5) de constante de raideur k est fixé par l'une de ses extrémités à l'arbre et par l'autre à un solide (3) de masse M, qui peut coulisser sans frottement sur la tige. Si le solide arrive en butée, il actionne un capteur (4) qui déclenche l'arrêt de la machine (voir schéma A).

Le but de l'exercice est de déterminer le mouvement du point P (voir schéma B).

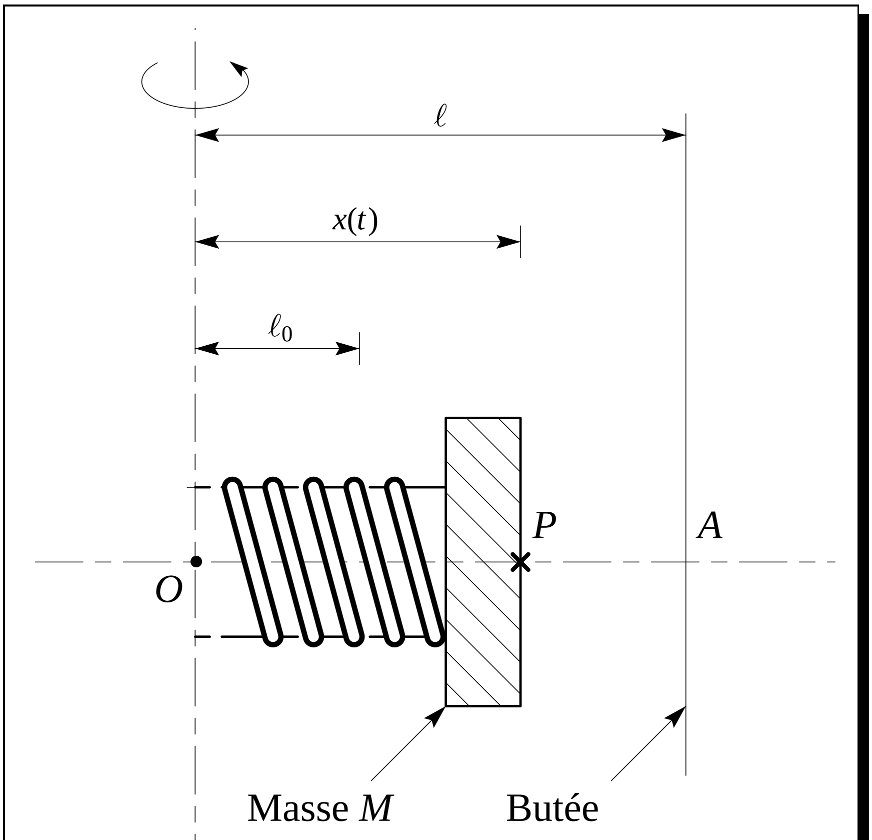

Schéma B

Pour cela, on munit la droite (OA) d'un repère $(O, \vec{\imath})$ où $\overrightarrow{OA} = \ell\vec{\imath}$ (unité : le mètre).

L'unité de temps étant la seconde, la position du point P à l'instant t est alors repérée par son abscisse $x(t)$ dans le repère précédent et l'on a, à tout instant t :

(1) $$\ell_0 \leqslant x \leqslant \ell$$

(2) $$x''(t) + \left(\frac{k}{M} - \omega^2\right)x(t) = \frac{k}{M}\ell_0 \qquad \text{qui s'écrit :} \qquad x'' + \left(\frac{k}{M} - \omega^2\right)x = \frac{k}{M}\ell_0$$

Les contraintes techniques fixent pour tout le problème

$$M = 0,062\,5\,\text{kg} \qquad k = 169\,\text{N}\,.\text{m}^{-1} \qquad \ell_0 = 0,072\text{m} \qquad \ell = 0,12\text{m}$$

D'autre part, pour simplifier l'étude, les conditions initiales sont fixées à $t = 0$: $x(0) = \ell_0$ et $x'(0) = 0$.

Question préliminaire :

Vérifier que l'équation différentielle (2) s'écrit :

(E) $$x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 194,688.$$

1. On considère dans cette question que $\omega = 20\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 0$.

b) Déterminer une fonction constante solution de (E). En déduire la forme générale des solutions de (E) puis la solution particulière vérifiant les conditions initiales données.

c) La position du point P est donnée par :

$$x(t) = -0,012\,5\cos(48t) + 0,084\,5.$$

Le point P atteint-il la butée ?

2. On considère maintenant que $\omega = 110,5\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) En adoptant la même démarche qu'à la question **1.**, montrer que la forme générale des solutions de l'équation (E) est :

$$C_1 e^{97,5t} + C_2 e^{-97,5t} - 0,020\,48$$

puis déterminer la solution particulière x vérifiant les conditions initiales données.

b) Calculer $x(0,01)$ et $x(0,02)$. Interpréter le résultat.

3. On considère enfin que $\omega = 52\,\text{rd}\,.\,\text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales données.

b) À quel instant le point P atteint-il la butée ?