Brevet de technicien supérieur, session 1996

Exercice 1 : La machine à bouchons, bts mai**,** *1996*

1. Soit A l'événement « *le bouchon est acceptable* ». Vu les conditions posées par l'énoncé, la probabilité de l'événement A est $p(A) = p(21,95 \leqslant X \leqslant 22,05)$.

Or la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(22; 0,025)$, donc la variable T définie par $T = \dfrac{X-22}{0,025}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

On a donc

$$\begin{aligned}
p(A) = p(21,95 \leqslant X \leqslant 22,05) &= p(-0,05 \leqslant X-22 \leqslant 0,05)\\
&= p\left(\frac{-0,05}{0,025} \leqslant \frac{X-22}{0,025} \leqslant \frac{0,05}{0,025}\right)\\
&= p(-2 \leqslant T \leqslant 2)\\
&= 2\Pi(2)-1 \quad \text{vu la symétrie de la courbe de la loi } \mathcal{N}(0,1)\\
&= 2\times 0,977\,2-1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(A) = 0,954\,4}
\end{aligned}$$

2. *a*) Dans cette expérience, les 80 tirages sont indépendants (puisqu'avec remise), et il n'y a que deux issues possibles (bouchon défectueux ou non), l'issue qui nous intéresse ayant une probabilité de $0,05$. La variable Y suit donc la $\boxed{\text{loi binômiale } \mathcal{B}(80; 0,05)}$, et son espérance mathématique est $E(Y) = 80 \times 0,05$, soit $\boxed{E(Y) = 4}$.

b) La variable Y_1 suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Or le cours nous dit que la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée, sous certaines conditions, par la loi de poisson $\mathcal{P}(np)$ (on conserve la même valeur de l'espérance). Ici, le paramètre λ est donc $\boxed{\lambda = 4}$. Dans ce cas, on lit dans le formulaire que $\boxed{p(Y_1 = 10) = 0,005}$.

3. *a*) La variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma')$, donc la variable T définie par $T = \dfrac{\overline{X}-m}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. De la même façon qu'à la question **1.**, on a :

$$\begin{aligned}
p\big(22-a \leqslant \overline{X} \leqslant 22+a\big) &= p\left(\frac{22-a-m}{\sigma'} \leqslant T \leqslant \frac{22+a-m}{\sigma'}\right)\\
&= p\left(-\frac{a}{\sigma'} \leqslant T \leqslant \frac{a}{\sigma'}\right)\\
&= 2\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right)-1 \quad \text{vu la symétrie de la courbe de la loi } \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

Pour avoir $p\big(22-a \leqslant \overline{X} \leqslant 22+a\big) = 0,95$, il faut donc avoir $2\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right)-1 = 0,95$, soit $\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right) = 0,975$. Un coup d'œil sur le formulaire nous dit qu'alors, on doit avoir $a/\sigma' = 1,96$, soit $a = 1,96 \times \sigma'$. Finalement, on obtient $\boxed{a = 0,004\,9}$.

b) Le calcul des moyenne et écart-type de l'échantillon donne $\boxed{m = 21,998\,8}$ et $\boxed{\sigma \approx 0,246\,3}$.

La question précédente nous dit que si la machine est bien réglée, alors la moyenne des diamètres d'un échantillon a 95% de chances d'être dans l'intervalle $[21,995\,1; 22,004\,9]$. Comme la moyenne de notre échantillon est bien dans cet intervalle, on peut légitimement $\boxed{\text{accepter, au risque de 5\%, l'hypothèse}}$ selon laquelle la machine est bien réglée.

Exercice 2 : Suspension de remorque, bts mai**,** *1996*

A Soit donc à résoudre l'équation différentielle

$$(1) \qquad Mx'' + kx = 0.$$

• L'équation caractéristique associée est : $Mr^2 + k = 0$, équation qui admet les deux racines complexes conjuguées $\pm i\sqrt{k/M} = \pm 5i$ avec les valeurs numériques de M et k données. On en déduit que les solutions de l'équation (1) sont toutes les fonctions x ayant une écriture du type $x = e^0(A\cos(5t) + B\sin(5t))$ où A, B constantes réelles quelconques, soit $\boxed{x(t) = A\cos(5t) + B\sin(5t) \quad \text{où } A, B \text{ constantes réelles quelconques}}$.

• Si x est une solution de (1), alors $x(0) = A$. De la condition initiale $x(0) = 0$, on en déduit que, pour la solution particulière cherchée, $\boxed{A = 0}$.

• Toujours pour la solution particulière x cherchée, on aura alors $x'(t) = 5B\cos(5t)$. La condition initiale $x'(0) = -0,10$ donne alors $\boxed{B = -0,02}$.

• Finalement, la solution de (1) vérifiant les deux conditions initiales données est la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{x(t) = -0,02\sin 5t}$. Cette fonction est périodique de période $\boxed{\omega = 2\pi/5}$.

B On considère maintenant l'équation

$$(2) \qquad Mx'' + \lambda x' + kx = 0.$$

1. *a*) L'équation caractéristique associée est

$$Mr^2 + \lambda r + k = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = \lambda^2 - 4Mk$, soit $\Delta = -4.10^6 = (2000i)^2$ avec les valeurs numériques de M, λ et k données. L'équation caractéristique admet donc les deux racines complexes conjuguées $(-\lambda \pm 2000i)/2M = -3 \pm 4i$. D'où la solution générale de l'équation (2) : $\boxed{x(t) = e^{-3t}\left(A\cos(4t) + B\sin(4t)\right)}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.

b) De $x(0) = 0$, on en déduit que $\boxed{A = 0}$ puisque $x(0) = A$.

On a alors $x'(t) = -3e^{-3t} \times B\sin(4t) + 4Be^{-3t}\cos(4t)$, et donc $x'(0) = 4B$. De la condition initiale $x'(0) = -0,08$, on tire alors $\boxed{B = -0,02}$. La solution particulière cherchée est donc la fonction x définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{x(t) = -0,02e^{-3t}\sin(4t)}$.

2. *a*) Sans surprise, la fonction f à étudier est la solution particulière que l'on vient de trouver à la question précédente. Comme e^{-3t} est toujours non nul, on a

$$f(t) = 0 \iff \sin(4t) = 0 \iff 4t = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \boxed{t = k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Sur l'intervalle $[0; 1,5]$, l'équation $f(t) = 0$ admet donc les deux solutions : $\boxed{0 \text{ et } \frac{\pi}{4}}$.

b) On trouve $f'(t) = 0,06e^{-3t}\sin(4t) - 0,08e^{-3t}\cos(4t)$, soit $\boxed{f'(t) = 0,02e^{-3t}\left(3\sin(4t) - 4\cos(4t)\right)}$.

c) Comme $0,02e^{-3t}$ est toujours différent de 0, il vient :

$$f'(t) = 0 \iff 3\sin(4t) - 4\cos(4t) = 0 \iff \tan(4x) = \frac{4}{3}$$

$$\iff 4x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En essayant différentes valeurs de k, on trouve que l'équation $f'(t) = 0$ admet deux solutions t_1 et t_2 (pour $k = 0$ et $k = 1$) dans l'intervalle $[0; 1,5]$. On a $\boxed{t_1 \approx 0,23}$ et $\boxed{t_2 \approx 1,02}$. Les valeurs correspondantes de f sont $\boxed{f(t_1) \approx 0,008}$ et $\boxed{f(t_2) \approx 0,000\,8}$.

d)