Brevet de technicien supérieur, session 1995

Exercice 1 : Des glaces ! bts mai**,** *1995*

A La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(100, \sigma)$, donc la variable T définie par $T = \dfrac{X-100}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. On a $\sigma = 2\sqrt{2}$. Il vient

$$\begin{aligned}
p(95 \leqslant X \leqslant 105) &= p\left(\frac{95-100}{\sigma} \leqslant \frac{X-100}{\sigma} \leqslant \frac{105-100}{\sigma}\right)\\
&= p\left(-\frac{5}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{5}{\sigma}\right)\\
&= 2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 \qquad \text{vu la parité de la loi } \mathcal{N}(0,1)\\
&\approx 2\Pi(1,77) - 1 \approx 0,9232 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(95 \leqslant X \leqslant 105) = 0,92}
\end{aligned}$$

2. On a vu précedemment que

$$p(95 \leqslant X \leqslant 105) = 2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1$$

Pour avoir cette probabilité égale à $0,95$, on doit donc avoir

$$2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 1,95 \qquad \text{soit} \qquad \Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0,975$$

Dans le formulaire qui donne $\Pi(t)$ en fonction de t pour la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on voit que la valeur de t qui correspond le mieux à $\Pi(t) = 0,975$ est la valeur $\boxed{t = 1,96}$. On doit donc avoir

$$\frac{5}{\sigma} = 1,96 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sigma = \frac{5}{1,96} \approx 2,55}$$

B **1.** On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres. La seule issue qui nous intéresse pour chaque tirage est : cône défectueux (probabilité $0,0005$) ou non. Nous sommes dans un schéma de Bernouilli, et la variable Z, qui compte les défectueux, suit

$$\boxed{\text{la loi binômiale } \mathcal{B}(2\,000\,;0,000\,5)},$$

d'espérance mathématique $E(X) = 2.10^3 \times 5.10^{-4} = 1$.

2. *a*) En approximant la loi précédente par une loi de Poisson, on garde la même espérance mathématique, d'où la valeur du paramètre $\boxed{\lambda = 1}$.

b) Un lot reste inchangé s'il y a strictement moins de 5 cônes défectueux. Or

$$\begin{aligned}
P(Z < 5) &= \sum_{i=0}^{i=4} p(Z = i)\\
&= p(Z=0) + p(Z=1) + p(Z=2) + p(Z=3) + p(Z=4)\\
&= 0,368 + 0,368 + 0,184 + 0,061 + 0,015 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Z < 5) = 0,996}
\end{aligned}$$

où les valeurs de $p(Z = i)$ ont été lues dans le formulaire.

Exercice 2 : Étude d'un système de sécurité, *bts mai, 1995*

Question préliminaire :

Comme $k/M = 2\,704$, on vérifie facilement que l'équation différentielle (2) s'écrit :

$$(E) \qquad x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 194,688.$$

1. Avec $\omega = 20$, l'équation (E) s'écrit

$$(E) \qquad \boxed{x'' + 2\,304x = 194,688}.$$

a) L'équation sans second membre (E_0) : $x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 0$ s'écrit

$$(E_0) \qquad x'' + 2\,304x = 0 \qquad \text{d'équation caractéristique} \qquad r^2 + 2\,304 = 0$$

L'équation caractéristique admet les deux solutions complexes conjuguées $r = \pm i\sqrt{2\,304} = \pm 48i$. La solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est donc la fonction

$$\boxed{x(t) = A\cos(48t) + B\sin(48t) \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

b) La fonction constante x définie pour tout réel t par

$$\boxed{x(t) = \frac{194,688}{2\,304} = 0,084\,5}$$

est une solution évidente de l'équation (E).

- La forme générale des solutions de l'équation (E) est donc

$$\boxed{x(t) = 0,084\,5 + A\cos(48t) + B\sin(48t) \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

- Sachant que la fonction cherchée a une écriture de ce type, elle vérifiera donc

$$x(0) = 0,084\,5 + A \qquad \text{et} \qquad x'(t) = -48A\sin(48t) + 48B\cos(48t) \quad \text{soit} \quad x'(0) = 48B.$$

Des conditions initiales $x(0) = \ell_0$ et $x'(0) = 0$, on déduit alors le système

$$\begin{cases} 0,084\,5 + A = \ell_0 = 0,072 \\ 0 = 48B \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(A\,;B) = (-0,012\,5\,;0)}$$

- Finalement, la solution particulière cherchée est la fonction x définie par

$$\boxed{x(t) = 0,084\,5 - 0,012\,5\cos(48t)}$$

c) Le point P atteint la butée s'il existe un nombre réel positif t tel que $x(t) = \ell = 0,12$. Autrement dit s'il existe une solution réelle t à l'équation

$$\cos(48t) = \frac{0,084\,5 - 0,12}{0,012\,5} \approx -2,85.$$

Comme la valeur d'un cosinus est toujours comprise entre -1 et 1, on peut affirmer que cette équation n'a pas de solution réelle. Le point $\boxed{P \text{ n'atteint pas la butée}}$ dans ce cas de figure.

2. Avec $\omega = 110,5$, l'équation (E) s'écrit

$$(E) \qquad \boxed{x'' - 9\,506,25x = 194,688}.$$

a) L'équation sans second membre (E_0) : $x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 0$ s'écrit

$$(E_0) \qquad x'' - 9\,506,25x = 0 \qquad \text{d'équation caractéristique} \qquad r^2 - 9\,506,25 = 0$$

L'équation caractéristique admet les deux racines réelles $r = \pm\sqrt{9\,506,25} = \pm 97,5$. La solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est donc la fonction

$$\boxed{x(t) = Ae^{97,5t} + Be^{-97,5t} \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

b) La fonction constante x définie pour tout réel t par

$$\boxed{x(t) = \frac{194,688}{-9\,506,25} = -0,020\,48}$$

est une solution évidente de l'équation (E).

- La forme générale des solutions de l'équation (E) est donc

$$\boxed{x(t) = -0,020\,48 + C_1 e^{97,5t} + C_2 e^{-97,5t} \qquad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

- Sachant que la fonction cherchée a une écriture de ce type, elle vérifiera donc

$$x(0) = -0,020\,48 + C_1 + C_2 \qquad \text{et} \qquad x'(t) = 97,5C_1 e^{97,5t} - 97,5C_2 e^{-97,5t} \quad \text{soit} \quad x'(0) = 97,5(C_1 - C_2)$$

Des conditions initiales $x(0) = \ell_0$ et $x'(0) = 0$, on déduit alors le système

$$\begin{cases} -0,020\,48 + C_1 + C_2 = \ell_0 = 0,072 \\ 0 = 97,5(C_1 - C_2) \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}(0,072 + 0,020\,48) \\ C_1 = C_2 \end{cases}$$

$$\text{d'où} \qquad \boxed{(C_1\,; C_2) = (0,046\,24\,; 0,046\,24)}$$

- Finalement, la solution particulière cherchée est la fonction x définie par

$$\boxed{x(t) = -0,020\,48 + 0,046\,24\left(e^{97,5t} + e^{-97,5t}\right)}$$

c) Avec cette dernière fonction, on a $\boxed{x(0,01) \approx 0,119\,5}$ et $\boxed{x(0,02) \approx 0,311}$. On en déduit que la distance $\ell = 0,12$ est atteinte pour un instant $t_0 \in [0,01\,; 0,02]$. En résumé, $\boxed{\text{le point } P \text{ atteint la butée}}$.

3. Avec $\omega = 52$, l'équation (E) s'écrit

$$(E) \qquad \boxed{x'' = 194,688}.$$

a) L'équation sans second membre (E_0) : $x'' + (2\,704 - \omega^2)x = 0$ s'écrit

$$(E_0) \qquad x'' = 0 \qquad \text{d'équation caractéristique} \qquad r^2 = 0$$

L'équation caractéristique admet la racine double $r = 0$. La solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est donc la fonction

$$\boxed{x(t) = At + B \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

- Pour déterminer une solution évidente de l'équation (E), il suffit de faire deux intégrations successives. Une primitive de $x'' = 194,688$ est $x' = 194,688t$, et une primitive de x' est la fonction

$$x(t) = 194,688\frac{t^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x(t) = 97,344t^2}$$

- La forme générale des solutions de l'équation (E) est donc

$$\boxed{x(t) = 97,344t^2 + At + B \qquad \text{où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques.}}$$

- Sachant que la fonction cherchée a une écriture de ce type, elle vérifiera donc

$$x(0) = B \qquad \text{et} \qquad x'(t) = 194,688t + A \quad \text{soit} \quad x'(0) = A$$

Des conditions initiales $x(0) = \ell_0$ et $x'(0) = 0$, on déduit alors le système

$$\begin{cases} B = \ell_0 = 0,072 \\ A = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{(A\,; B) = (0\,; 0,072)}$$

- Finalement, la solution particulière cherchée est la fonction x définie par

$$\boxed{x(t) = 97,344t^2 + 0,072.}$$

b) Si le point P atteint la butée à l'instant t_0, on aura $x(t_0) = \ell$. Il faut donc résoudre l'équation

$$97,344t^2 + 0,072 = 0,12 \iff t^2 = \frac{0,12 - 0,072}{97,344} \approx 4,9.10^{-4} \iff t \approx \pm\sqrt{4,9.10^{-4}}$$

L'instant t_0 cherché est la seule solution positive, soit $\boxed{t_0 \approx 0,022\,\text{ms}}$.