Brevet de technicien supérieur, session 1991

Exercice 1 : (*12 points*) **Le parachute,** Bts Mécanique et Automatismes Industriels**,** *1991*

À résoudre l'équation différentielle

(1) $$mv' + kv = mg.$$

1. *a*) Si w est une fonction constante, solution de l'équation (1), alors on aura bien sûr $\boxed{w(t) = \dfrac{mg}{k}}$ puisque $w' = 0$.

b) On commence par résoudre l'équation sans second membre (E_0) :

$$(E_0) \qquad mv' + kv = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v' = -\frac{k}{m}v$$

dont la solution générale est $v_0(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ où C est une constante réelle quelconque. Reste à ajouter une solution particulière de l'équation (1). On obtient ainsi la solution générale de l'équation (1) :

$$\boxed{v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle quelconque}}.$$

2. Avec les valeurs numériques proposées par l'énoncé, l'équation (1) s'écrit

$$\boxed{(1) : \quad 8v' + 25v = 80} \qquad \text{dont la solution générale est} \qquad \boxed{v(t) = Ce^{-\frac{25}{8}t} + \frac{16}{5}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

En particulier, on a $\boxed{v(0) = C + \dfrac{16}{5}}$

a) Si $v(0) = 5$, on obtient immédiatement

$$C = 5 - \frac{16}{5} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{C = \frac{9}{5}} \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{v_1(t) = \frac{1}{5}\left(9e^{-\frac{25}{8}t} + 16\right)}$$

b) Si $v(0) = 0$, on obtient

$$\boxed{C = -\frac{16}{5}} \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{v_2(t) = \frac{16}{5}\left(1 - e^{-\frac{25}{8}t}\right)}$$

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, il est clair que l'on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} v_1(t) = \dfrac{16}{5} = \lim\limits_{x\to+\infty} v_2(t)}$.

d) Enfin si $v(0) = \dfrac{16}{5} = 3,2$, on obtient

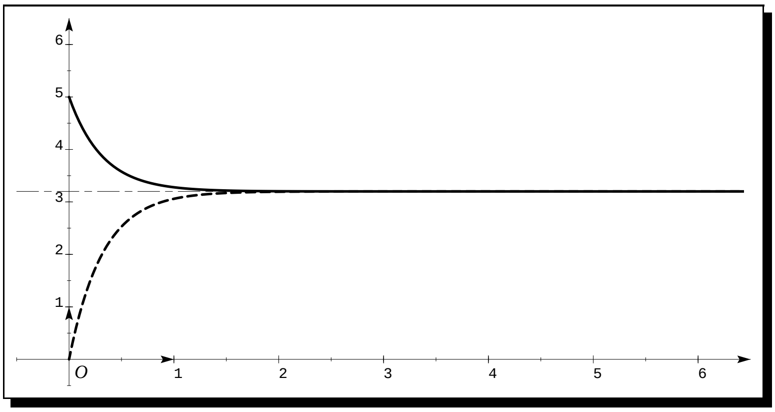
$$\boxed{C = 0} \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{v_3(t) = \frac{16}{5} = 3,2}$$

e) Pour tracer ces courbes, il faut évidemment étudier les variations des fonctions v_1, v_2 et v_3. On trouve $v_1'(t) = -\dfrac{45}{8}e^{-\frac{25}{8}t}$ toujours négatif puisque l'exponentielle est toujours positive, et $v_2'(t) = 10e^{-\frac{25}{8}t}$ qui est toujours positif. La fonction v_3 est quand à elle constante. D'où les tableaux de variations suivants :

x	0	$+\infty$
$v_1'(x)$	$-$	
$v_1(x)$	5 ↘	$3,2$

x	0	$+\infty$
$v_2'(x)$	$+$	
$v_2(x)$	0 ↗	$3,2$

et les courbes :



Exercice 2 : (*8 points*) **Ajustements et probabilités,** Bts Mécanique et Automatismes Industriels**,** *1991*

1. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(20; 0,04)$, alors la variable V définie par $V = (X - 20)/0,04$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Une pièce est acceptable si sa cote x vérifie $19,92 \leqslant x \leqslant 20,08$. D'où

$$\begin{aligned} p(\text{acceptable}) = p(19,92 \leqslant X \leqslant 20,08) &= p\left(\frac{19,92-20}{0,04} \leqslant \frac{X-20}{0,04} \leqslant \frac{20,08-20}{0,04}\right) \\ &= p(-2 \leqslant V \leqslant 2) = 2\Pi(2) - 1 \\ &= 2 \times 0,977\,2 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(\text{acceptable}) = 0,954\,4} \end{aligned}$$

b) On assimile le prélèvement de 100 pièces à un tirage aléatoire avec remise répété 100 fois. Les expériences sont alors indépendantes, et il n'y a que deux issues observées : défectueuse ou non, la probabilité d'une issue défectueuse étant de $0,05$.

On est dans le cadre d'un schéma de Bernouilli et la variable T suit $\boxed{\text{la loi binômiale } \mathcal{B}(100; 0,05)}$. On assimile alors cette loi à une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100 \times 0,05$, soit $\boxed{\lambda = 5}$. Dans ce cas, il vient

$$\begin{aligned} P(T < 4) &= p(T = 0) + p(T = 1) + p(T = 2) + p(T = 3) \\ &= 0,007 + 0,034 + 0,084 + 0,140 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(T < 4) = 0,265} \end{aligned}$$

2. La variable Y suit la loi normale $\mathcal{N}(20,1; 0,03)$. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = Y - X$, alors Z suit une loi normale.

a) La moyenne de cette loi est $m_z = m_y - m_x = 20,1 - 20$, soit $\boxed{m_z = 0,1}$. De plus sa variance est $V_z = V_y + V_x = (0,04)^2 + (0,03)^2$. Son écart-type est donc $\sigma(Z) = \sqrt{(0,04)^2 + (0,03)^2}$, soit $\boxed{\sigma(Z) = 0,05}$.

b) Si Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1; 0,05)$, alors la variable W définie par $W = (Z - 0,1)/0,05$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. La probabilité que l'on puisse assembler deux pièces A et B prises au hasard est égale à la probabilité que la variable Z soit supérieure à $0,01$. D'où le calcul

$$\begin{aligned} p(Z \geqslant 0,01) &= p\left(\frac{Z-0,1}{0,05} \geqslant \frac{0,01-0,1}{0,05}\right) = p(W \geqslant -1,8) \\ &= p(W \leqslant 1,8) \qquad \text{vu la parité de la courbe de la loi } \mathcal{N}(0,1) \\ &= \Pi(1,8) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Z \geqslant 0,01) = 0,964\,1} \end{aligned}$$
