Corrigé du devoir surveillé n^o 5

Exercice : Production industrielle et contrôle de qualité

1. La variable L suit la loi normale $\mathcal{N}(300, 3)$, donc la variable T définie par $T = (L - 300)/3$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} p(293,5 \leqslant L \leqslant 306,5) &= p\left(\frac{293,5-300}{3} \leqslant \frac{L-300}{3} \leqslant \frac{306,5-300}{3}\right) \\ &= p(-2,16 \leqslant T \leqslant 2,16) \\ &= 2\Pi(2,16) - 1 \qquad \text{vu la symétrie de la loi } \mathcal{N}(0,1) \\ &= 2 \times 0,984\,6 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(293,5 \leqslant L \leqslant 306,5) = 0,969\,2} \end{aligned}$$

2. • $p(E_1) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ puisque A et B sont indépendants. D'où $p(E_1) = 0,03 \times 0,07$, soit $\boxed{p(E_1) = 0,002\,1}$.

• $p(E_2) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,03 + 0,07 - 0,021$, soit $\boxed{p(E_2) = 0,097\,9}$.

• $p(E_3) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,097\,9$, soit $\boxed{p(E_3) = 0,902\,1}$.

3. a) On a 10 tirages indépendants, pour seulement 2 issues possibles (E_3 ou $\overline{E}_3$), on est bien dans le cadre d'une loi binômiale. Donc X suit la $\boxed{\text{loi binômiale } \mathcal{B}(10; 0,902)}$.

b) Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 9) &= p(X = 9) + p(X = 10) \\ &= C_{10}^{9}(0,902)^9 \times (0,098)^1 + C_{10}^{10}(0,902)^{10} \times (0,098)^0 \\ &= 10 \times (0,902)^9 \times (0,098) + (0,902)^{10} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(X \geqslant 9) = 0,744} \end{aligned}$$

4. La variable $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; 0,084/\sqrt{60})$, et la moyenne sur un échantillon donné est $\overline{x} = 4,012$.

a) L'estimation ponctuelle est $\boxed{\mu = 4,012}$.

b) On veut trouver le réel positif a tel que $p(\overline{x} - a \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + a) = 0,95$. Introduisons la variable $\overline{T}$ définie par

$$\overline{T} = \frac{\overline{X} - \mu}{0,084} \times \sqrt{60},$$

alors $\overline{T}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et l'on sait que pour tout réel positif t on a

$$p(-t \leqslant \overline{T} \leqslant t) = 2\Pi(t) - 1.$$

Un coup d'œil sur le formulaire nous montre qu'il faut choisir $t = 1,96$ pour obtenir une probabilité de $0,95$. Autrement dit, on sait que l'on a

$$\begin{aligned} p\left(-1,96 \leqslant \frac{\sqrt{60}}{0,084}\left(\overline{X} - \mu\right) \leqslant 1,96\right) &= 0,95 \\ &= p\left(-1,96 \times \frac{0,084}{\sqrt{60}} \leqslant \overline{X} - \mu \leqslant 1,96 \times \frac{0,084}{\sqrt{60}}\right) \\ &= p(-0,021 - \overline{X} \leqslant -\mu \leqslant 0,021 + \overline{X}) \\ &= p(0,021 + \overline{X} \geqslant \mu \geqslant -0,021 - \overline{X}) \end{aligned}$$

D'où ici l'intervalle de confiance à 95% cherché : $\boxed{I = [3,991\,; 4,033]}$.

c) Bien sûr, $\boxed{\text{l'affirmation proposée est fausse}}$: avec un intervalle de confiance à 95% on est encore très loin d'une certitude. . .