Corrigé du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 : Une équation différentielle d'ordre 2, *Bts Mécanique et Automatismes Industriels, 2000*

A **1.** L'équation caractéristique associée à (E_0) est l'équation $r^2 - 4 = 0$, quiadmet les 2 racines réelles $r_1 = 2$. et $r_2 = -2$. Le cours nous dit alors que les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions y ayant une écriture de la forme

$$\boxed{y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} \qquad \text{où} \qquad A \text{ et } B \text{ sont 2 constantes réelles quelconques}}$$

2. À partir de la fonction g donnée, on trouve

$$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} \qquad g'(x) = \frac{4}{3}(-2x+1)e^{-2x} \qquad \text{et} \qquad g''(x) = \frac{16}{3}(x-1)e^{-2x}$$

Il est alors facile de vérifier que l'on a bien

$$g'' - 4g = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

autrement dit que l'on a bien $\boxed{g \text{ solution particulière de } (E)}$.

3. On sait que la solution générale de (E) est obtenue en additionnant une solution particulière de (E) et la solution générale de (E_0). Ici on obtient comme solution générale de (E) la fonction y définie par

$$\boxed{y(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} + Ae^{2x} + Be^{-2x} \qquad \text{où} \qquad A \text{ et } B \text{ sont 2 constantes réelles quelconques}}$$

4. Soit h une solution de (E), on a alors

$$h'(x) = \frac{4}{3}(-2x+1)e^{-2x} + 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

ce qui donne

$$h(0) = A + B \qquad \text{et} \qquad h'(0) = \frac{4}{3} + 2A - 2B$$

Les conditions initiales imposées se traduisent alors par les 2 équations

$$A + B = \frac{4}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{4}{3} + 2A - 2B = -\frac{4}{3} \quad \text{soit} \quad A - B = -\frac{4}{3}$$

d'où le système de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} A + B = 4/3 \\ A - B = -4/3 \end{cases} \qquad \text{dont l'unique solution est le couple} \qquad (A, B) = \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

Finalement, la seule fonction h qui soit solution de l'équation différentielle (E) tout en vérifiant les 2 conditions initiales imposées est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{h(x) = \frac{4}{3}(x+1)e^{-2x}}$$

B **1.** *a*) Comme $(1+x)' = 1$ et $\left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$, on vérifie facilement que $\boxed{f'(x) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}.}$

b) On a f' sous forme d'un produit de facteurs. Or l'exponentielle est toujours strictement positive, $-4/3$ est toujours strictement négatif, et $(2x+1)$ est strictement positif pour x positif. On en déduit que la dérivée $f'(x)$ est toujours négative quand $x \geqslant 0$, autrement dit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est décroissante sur } [0, +\infty[}$.

2. On a $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ et donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, puisque

$$f(x) = \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x} = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-x}e^{-x} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$$

3. *a*) On sait que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

d'où

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{4} + \frac{(-2x)^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

soit

$$\boxed{e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

b) En multipliant cette dernière relation par $\frac{4}{3}(1+x)$, en ne prenant en compte que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3, il vient alors

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3}\left(1 - x + \frac{2}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

c) Cette relation nous donne immédiatement une équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$$\boxed{T \ : y = \frac{4}{3}(1-x)}$$

Quand à la position relative de C et T pour x positif au voisinage de 0, il suffit d'étudier le signe de la différence entre $f(x)$ et $T(x)$. Or ici on a

$$f(x) - T(x) = \frac{4}{9}x^3 + x^3\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme $\frac{4x^3}{3}$ est positif pour x positif, on en déduit que $\boxed{C \text{ au dessus de } T \text{ pour } x \text{ positif au voisinage de } 0}$.

4. a) On a

$$I = \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{4}{3}\int_0^3 (1+x)e^{-2x}\,dx$$

Posons

$$U = 1 + x \quad \text{et} \quad V' = e^{-2x} \qquad \text{il vient alors} \qquad U' = 1 \quad \text{et} \quad V = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\left[(1+x)e^{-2x}\right]_0^3 + \frac{1}{2}\int_0^3 e^{-2x}\,dx\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\left(4e^{-6} - 1\right) - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(-2e^{-6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{-6} - 1\right)\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I = 1 - 3e^{-6} \approx 0,99} \end{aligned}$$

Cette quantité représente, en unité d'aire, l'aire comprise entre la courbe C, l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

b) On a

$$\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{2}{3}te^{-t}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0 = \lim_{t\to+\infty} te^{-t}$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} = 0}$$

c) Par définition de $A(t)$, on a

$$A(t) = \int_0^t f(x)\,dx \qquad \text{soit} \qquad A(t) = \left(-\frac{2}{3}t - 1\right)e^{-2t} + 1.$$

En vertu des questions précédentes, on a donc bien évidemment $\boxed{J = 1}$ puisque $J = \lim_{t\to+\infty} A(t)$.

d) On a donc $\boxed{J - I = 3e^{-6} \approx 0,07}$, d'où $\boxed{0 \leqslant J - I \leqslant 10^{-2}}$. Et cette quantité représente l'aire du domaine plan infini compris entre la courbe C, l'axe Ox et situé à droite de la droite verticale d'équation $x = 3$.

Exercice 2 : Des glaces ! bts mai**,** *1995*

A La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(100, \sigma)$, donc la variable T définie par $T = \dfrac{X - 100}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. On a $\sigma = 2\sqrt{2}$. Il vient

$$\begin{aligned} p(95 \leqslant X \leqslant 105) &= p\left(\frac{95-100}{\sigma} \leqslant \frac{X-100}{\sigma} \leqslant \frac{105-100}{\sigma}\right) \\ &= p\left(-\frac{5}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{5}{\sigma}\right) \\ &= 2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 \qquad \text{vu la parité de la loi } \mathcal{N}(0,1) \\ &\approx 2\Pi(1,77) - 1 \approx 0,923\,2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(95 \leqslant X \leqslant 105) = 0,92} \end{aligned}$$

2. On a vu précedemment que

$$p(95 \leqslant X \leqslant 105) = 2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1$$

Pour avoir cette probabilité égale à $0,95$, on doit donc avoir

$$2\Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 1,95 \qquad \text{soit} \qquad \Pi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0,975$$

Dans le formulaire qui donne $\Pi(t)$ en fonction de t pour la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on voit que la valeur de t qui correspond le mieux à $\Pi(t) = 0,975$ est la valeur $\boxed{t = 1,96}$. On doit donc avoir

$$\frac{5}{\sigma} = 1,96 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sigma = \frac{5}{1,96} \approx 2,55}$$

B **1.** On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres. La seule issue qui nous intéresse pour chaque tirage est : cône défectueux (probabilité $0,000\,5$) ou non. Nous sommes dans un schéma de Bernouilli, et la variable Z, qui compte les défectueux, suit

$$\boxed{\text{la loi binômiale } \mathcal{B}(2\,000\,;0,000\,5)},$$

d'espérance mathématique $E(X) = 2.10^3 \times 5.10^{-4} = 1$.

2. *a*) En approximant la loi précédente par une loi de Poisson, on garde la même espérance mathématique, d'où la valeur du paramètre $\boxed{\lambda = 1}$.

b) Un lot reste inchangé s'il y a strictement moins de 5 cônes défectueux. Or

$$\begin{aligned} P(Z < 5) &= \sum_{i=0}^{i=4} p(Z = i) \\ &= p(Z=0) + p(Z=1) + p(Z=2) + p(Z=3) + p(Z=4) \\ &= 0,368 + 0,368 + 0,184 + 0,061 + 0,015 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Z < 5) = 0,996} \end{aligned}$$

où les valeurs de $p(Z = i)$ ont été lues dans le formulaire.