Devoir surveillé n^o 9

durée : 2h

Exercice 1 : (*8 points*) **Isolation phonique**

L'unité d'intensité du son utilisé dans cet exercice est le décibel (symbole db). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$).

On appelle u_n l'intensité du son mesuré après la traversée de n plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10% de l'intensité du son qui lui parvient.

Par exemple,

$$u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. *a*) Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n.

b) Caractériser la suite $(u_n)_n$.

c) Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n.

3. Quelle intensité sonore obtient-t-on avec 10 plaques d'isolation phonique ?

4. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le nombre de plaques nécessaires pour absorber 90% de l'intensité initiale u_0.

Exercice 2 : (*5 points*) **Remboursement d'un emprunt**

Pour un prêt de 10 000 F remboursable en 6 annuités, un client s'est vu proposer par 2 établissements de crédit les 2 formules suivantes :

Première formule : les 6 annuités sont les 6 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 025 F et de raison 500 F ;

Deuxième formule : les 6 annuités sont les 6 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 530 F et de raison $1,15$.

1. Déterminer, pour la première formule, la somme totale remboursée au bout de six ans.

2. Même question qu'au **1.** avec la deuxième formule.

3. Quelle est la formule la plus avantageuse pour le client ?

Exercice 3 : (*7 points*) **Étude d'une fonction rationnelle**

– Partie A –

Soit C la courbe d'équation $y = a + \dfrac{2x+b}{x^2+2}$ où a et b sont des constantes réelles.

Déterminer les nombres réels a et b sachant que la courbe C passe par les points $A(-1;0)$ et $B\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.

– Partie B –

On considère la fonction f définie pour tout x de $[-6;6]$ par

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2}$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On note Δ la droite d'équation $y = 1$.
   a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f et Δ.
   b) Étudier le signe de $f(x) - 1$. En déduire les positions relatives de C_f et Δ.
2. *a*) Reproduire puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous (on donnera des valeurs à 10^{-2}) près :

x	-6	-4	-2	-1	0	1	2	4	6
$f(x)$									

   b) Ces résultat numériques sont-ils cohérents avec votre réponse du **1.***b*) ? (Justifier.)
3. Calculer f', la fonction dérivée de f, et montrer que l'on a

$$f'(x) = \frac{2 \times \left(-x^2+x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

4. *a*) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de la fonction dérivée $f'(x)$.
   b) En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-6;6]$.
5. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
6. Représenter, sur l'intervalle $[-6;6]$, la courbe C_f, la tangente T et la droite Δ. (unités graphiques : 1 cm ou 1 grand carreau sur Ox, et 3 cm ou 3 grand carreaux sur Oy.)