

Devoir surveillé n° 5

durée : 1h

Exercice 1 : (5 points) Angle de vecteurs

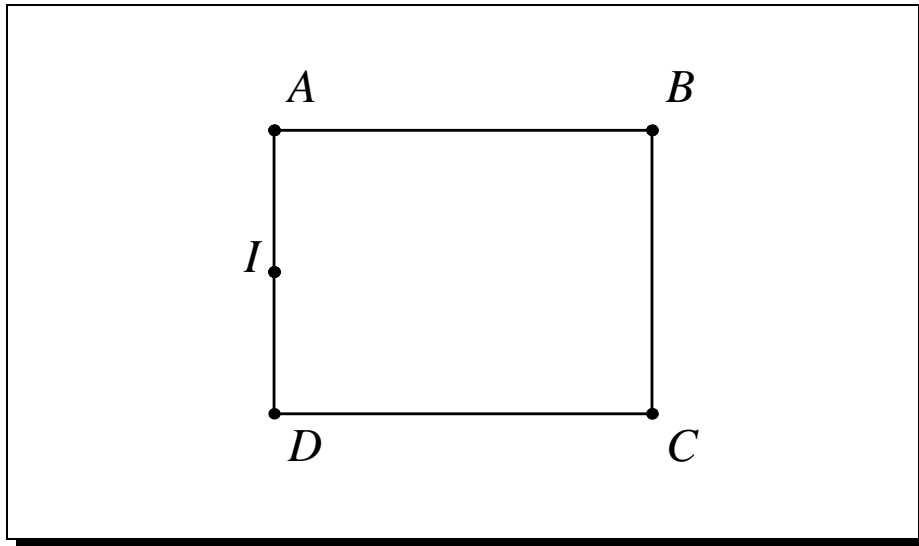
Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Faire une figure.
- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
- En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$, puis une valeur approchée, en radian ou en degré, et à 10^{-2} près, de chacune des deux valeurs possibles pour $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Exercice 2 : (6 points) À partir d'un dessin

On considère la figure ci-dessous dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) : $ABCD$ est un rectangle, $AB = 4$, $BC = 3$, et I est le milieu du segment $[AD]$.



Déterminer, en expliquant les calculs, les produits scalaires suivants :

$$a) \vec{AB} \cdot \vec{CD} \quad b) \vec{AB} \cdot \vec{CB} \quad c) \vec{BI} \cdot \vec{AD} \quad d) \vec{IB} \cdot \vec{IC} \quad e) \vec{CA} \cdot \vec{DB}$$

Exercice 3 : (1,5 points) Calcul de distance

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-2; 1; -\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad B(2; 6; \sqrt{2}).$$

Calculer la distance AB .

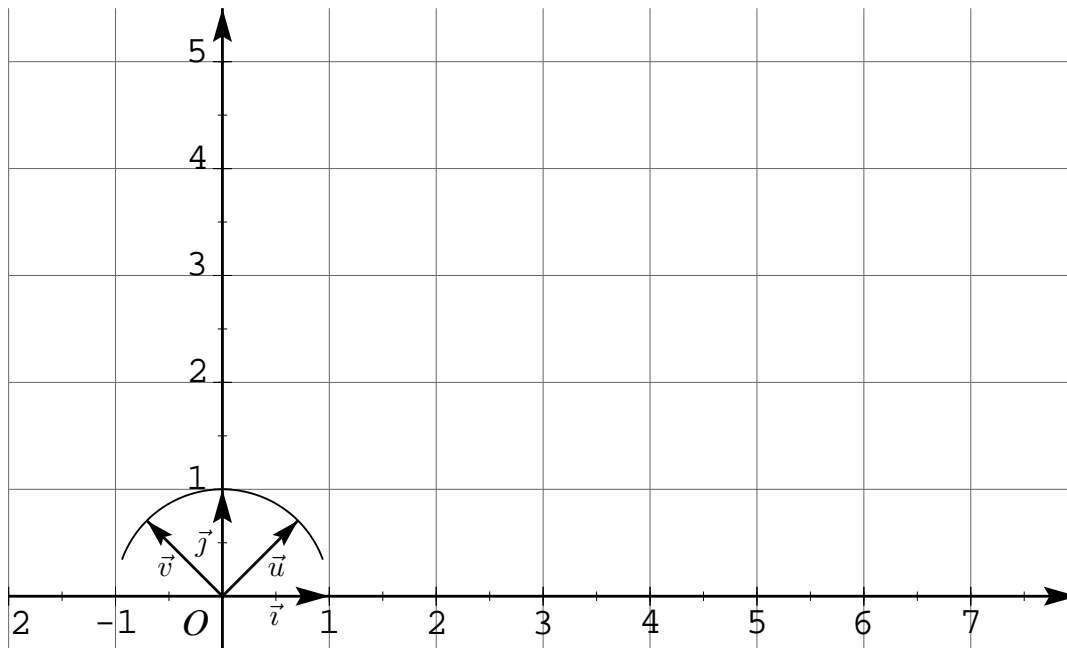
Exercice 4 : (7,5 points) Changement de base

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1 cm.

On considère les points $A(3, 3)$ et $B(7, 1)$ et les vecteurs

$$\vec{u} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et} \quad \vec{v} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} dans la base (O, \vec{u}, \vec{v}) .



1. Représenter les points A et B sur le graphique ci-dessus.
2. a) Calculer les deux nombres

$$a = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad b = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{j}$$

b) Que dire du vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$?

3. Vérifier que la famille (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormale du plan. Autrement dit, vérifier que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont bien orthogonaux, et de norme 1.
4. a) Calculer les deux nombres

$$\alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \quad \text{et} \quad \beta = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}$$

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Remarque ?

c) Tracer sur le dessin les vecteur $\alpha\vec{u}$ et $\beta\vec{v}$.