Corrigé du devoir surveillé n° 7

Exercice 1 : Étude d'une fonction rationnelle

A Les points A et B sont sur la courbe C, donc leurs coordonnées respectives vérifient l'équation de la courbe C. On a donc le système de deux équations :

$$\begin{cases} 0 = a + \frac{b-2}{3} \\ \frac{3}{2} = a + \frac{4+b}{4+2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 0 = 3a + b - 2 \\ 9 = 6a + 4 + b \end{cases} \Longrightarrow \ _{(2)-(1)}\begin{cases} 0 = 3a + b - 2 \\ 9 = 3a + 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

d'où : la courbe C a pour équation $\boxed{y = 1 + \frac{x-1}{x^2+2}}$.

B **1.** *a*) Chercher le point d'intersection de C_f et Δ revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = x^2 + 2x + 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2x \\ y = 1 \end{cases}$$

D'où l'unique point d'intersection $\boxed{I(1/2, 1)}$.

b) On a

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2} - \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2} = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$$

Ce quotient est du signe de $(2x - 1) \times (x^2 + 2)$, mais comme $x^2 + 2$ est toujours positif, seul intervient le signe de $2x - 1$, d'où le tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	
positions relatives		C_f au dessous de Δ		C_f au dessus de Δ	

2. *a*) On obtient

x	-6	-4	-2	-1	0	1	2	4	6
$f(x)$	$0,66$	$0,5$	$0,17$	0	$0,5$	$1,33$	$1,5$	$1,39$	$1,29$

b) $\boxed{\text{Les résultats sont cohérents}}$ puisque l'on a bien $f(x) \leqslant 1$ pour $x < 1/2$ et $f(x) \geqslant 1$ pour $x > 1/2$.

3. On utilise la formule de dérivée d'un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Il vient alors

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+2) - 2x(x^2+2x+1)}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{\left(x^2+2\right)^2}$$

On a donc bien

$$\boxed{f'(x) = \frac{2 \times \left(-x^2 + x + 2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}}$$

4. Ce quotient est du signe du produit $2 \times \left(-x^2 + x + 2\right) \times \left(x^2+2\right)^2$, mais comme 2 et $\left(x^2+2\right)^2$ sont strictement positifs, seul le signe de $-x^2 + x + 2$ intervient. On utilise alors la méthode du discriminant Δ, ici égal à 9, pour trouver les 2 racines

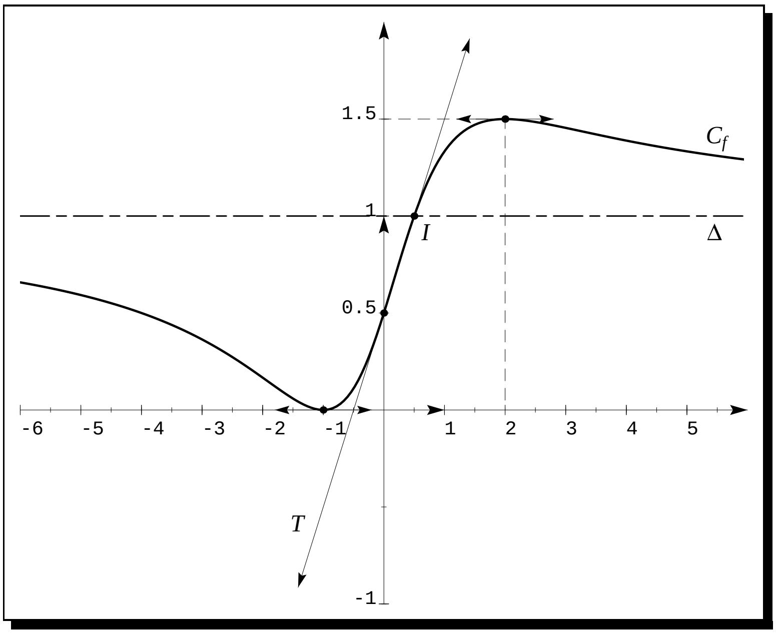
$$x_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$$

et l'on sait que le polynôme $-x^2 + x + 2$ est du signe de $-a$ (donc ici positif) entre les racines x_1 et x_2. D'où le tableau de variation de f sur $[-6\,;6]$:

x	-6		-1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\approx 0,66$	↘	0	↗	$3/2$	↘	$\approx 1,29$

5. En utilisant la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 0$, il vient $\boxed{T\ : y = x + \frac{1}{2}}$.

6.



Exercice 2 : Tangente de coefficient directeur donné

Soit f la fonction définie pour tout x réel par

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Chercher celles des tangentes à la courbe de f dont le coefficient directeur est 2 revient à déterminer les solutions de l'équation

$$f'(x) = 2.$$

Or $\boxed{f'(x) = 4x - 3}$. Il vient donc

$$4x - 3 = 2 \quad \iff \quad x = \frac{5}{4}$$

La courbe C admet donc une tangente de coefficient directeur 2 au point d'abscisse $5/4$. Et comme

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

l'équation de la tangente cherchée est

$$\boxed{T\ : y = 2x - \frac{17}{8}}$$

(équation obtenue avec la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$).
