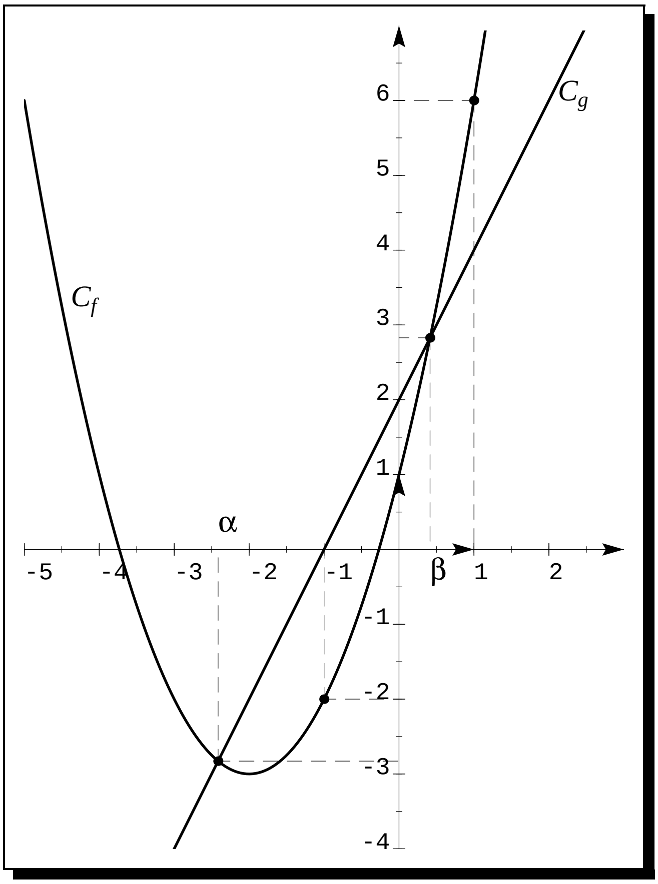
Corrigé du devoir surveillé n^{o} 3

Exercice 1 : intersection et positions relatives de deux courbes



1. La courbe passe par les points $A(-1,-2)$, $B(0,1)$ et $C(1,6)$. On en déduit le système

$$\begin{cases} f(-1) = -2 \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - b + c = -2 \\ c = 1 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

d'où l'on tire $\boxed{(a,b,c) = (1,4,1)}$, soit encore $\boxed{f(x) = x^2 + 4x + 1}$.

2. On reconnaît l'équation d'une droite dont il suffit de déterminer deux points.

3. *a*) *Intersection de C_f avec l'axe Oy* : Chercher cette intersection revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$

qui donne immédiatement l'unique couple solution : $(x,y) = (0,1)$, d'où l'unique point d'intersection : $\boxed{\text{le point } (0,1)}$

Intersection de C_f avec l'axe Ox : il faut résoudre le système

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ce qui revient à résoudre l'équation $x^2 + 4x + 1 = 0$. On trouve $\Delta = (2\sqrt{3})^2 = 12$ d'où les deux racines : $x = -2 \pm 2\sqrt{3}$. Finalement, on a deux points d'intersection : $\boxed{(-2 - \sqrt{3}, 0)}$ et $\boxed{(-2 + \sqrt{3}, 0)}$

b) Graphiquement, on voit qu'il y a deux solutions : $\alpha \simeq -2,5$ et $\beta \simeq 0,5$.

c) Par le calcul :

$$2x + 2 = x^2 + 4x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = x^2 + 2x - 1.$$

La méthode du discriminant s'impose. On trouve $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$, d'où les 2 racines réelles : $\boxed{\alpha = -1 - \sqrt{2}}$ et $\boxed{\beta = -1 + \sqrt{2}}$.

d) On a

$$f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 1.$$

En reprenant les calculs précédents, on a donc 2 racines réelles α et β, et cette différence est négative (signe de $-a$) pour x appartenant à l'intervalle $[\alpha; \beta]$, et positive pour x en dehors de cet intervalle.

D'où le tableau récapitulatif :

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		C_f au dessus de C_g		C_f au dessus de C_g		C_f au dessus de C_g	

Exercice 2 : Résolution approchée d'équation

1. On trouve $\boxed{f(4) = 23}$ et $\boxed{f(-4) = -9}$. D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-4		-2		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\nearrow$	23	$\searrow$	-9	$\nearrow$	23	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que : f ne s'annule ni sur $]-\infty; -4]$ (puisque son maximum est -9 sur cet intervalle), ni sur $[4; +\infty[$ (puisque son minimum est 23 sur cet intervalle).

En revanche, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-4; -2]$ et elle change de signe sur cet intervalle (puisque $f(-4) < 0$ et $f(-2) > 0$). On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet $\boxed{\text{une solution unique } \alpha \text{ sur } [-4; -2]}$.

Un raisonnement analogue prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet

$$\boxed{\text{deux autres solutions : } \beta \in [-2; 2], \text{ et } \gamma \in [2; 4]}.$$

2. Avec une calculatrice, et en procédant par dichotomie, on trouve :

$\boxed{-3,73 < \alpha < -3,72}$ puisque $f(-3,73) < 0$ et f(-3, 72) > 0

$\boxed{0,60 < \beta < 0,61}$ puisque $f(0,60) > 0$ et f(0, 61) < 0

$\boxed{3,12 < \gamma < 3,13}$ puisque $f(3,12) < 0$ et f(3, 13) > 0
