Suites géométriques

Exercice 1 : Une suite géométrique simple

Monter que la suite définie pour tout n par $u_n = 3^n$ est géométrique. Déterminer u_0, u_1 et la raison de cette suite.

Exercice 2 : Une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ vérifiant $u_1 = 2$. Déterminer u_0 et u_{10}.

Exercice 3 : Suite : une application directe du cours

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par

$$v_0 = 9 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Préciser, en les justifiant, la nature et les caractéristiques de cette suite.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Représenter graphiquement la suite (v_n).
5. Calculer $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{117}$. (Valeur exacte, puis valeur approchée à 10^{-3} près.)

Exercice 4 : À la banque : les intérêts composés

1. On place 10 000 F sur un livret de caisse d'épargne au taux de $4,5\%$ par an. On note $u_0 = 10\,000$ et u_n la somme disponible à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année.
   a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
   b) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
   c) Caractériser la suite (u_n).
   d) Quelle est la somme disponible au bout de 10 ans ?
   e) Au bout de combien d'années aura-t-on 20 000 F ou plus sur ce compte ?
2. Reprendre les questions précédentes si le taux est maintenant de $2,25\%$ par an.

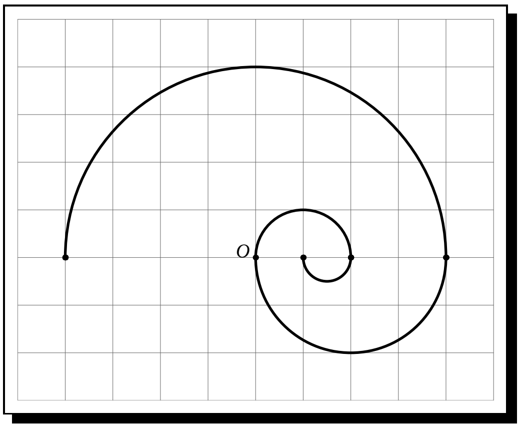
Exercice 5 : Le jeu d'échec

La légende raconte que le roi de Perse voulut récompenser l'inventeur du jeu d'échec, qui habitait son royaume. Il le fit convoquer et lui demanda ce qu'il désirai en récompense de son invention. « Je désirerai un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière des 64 cases de mon échiquier ». Le roi, qui n'était pas mathématicien, fût étonné de la modestie de la demande : « C'est tout ? » lui fit-il. . .

Hélas, après avoir calculé et recalculé toute la nuit, les savants durent annoncer au roi que toutes les réserves du royaume ne suffiraient pas, et que l'on ne pourrait jamais payer un tel tribut.

a) Au bout du compte, combien de grains de blé l'inventeur demande-t-il au roi ?
b) En admettant qu'un grain de blé fasse environ un dixième de gramme, déterminer (en tonnes) le poids représentant la quantité totale demandée par l'inventeur.

Exercice 6 : La longueur de la spirale



Sur la figure ci-dessus, chacun des demi-cercles a pour diamètre un rayon du demi-cercle précédent.

Calculer la longueur de cette spirale lorsqu'elle est composée de 6 demi-cercles, le rayon du plus grand mesurant 8 cm.

Exercice 7 : Désintégration d'un corps radioactif

Les éléments radioactifs sont instables et ont tendance à se désintégrer. En général, pour un atome donné, il est absolument impossible de prévoir à quel instant va se produire sa désintégration. En revanche, on a une propriété surprenante lorsque l'on dispose d'une grande quantité de noyaux radioactifs de même nature : on connaît très précisément le laps de temps nécessaire (et suffisant) pour que la moitié des atomes se désintègrent. On appelle *demi-vie* ou *période*, et on note T ce laps de temps (dépendant du corps considéré).

Par exemple, pour l'iode 131, la demi-vie est $T = 8$ jours. Ainsi, si l'on dispose d'un gramme d'iode 131, il en restera un demi-gramme au bout de 8 jours, un quart de gramme au bout de 16 jours, un huitième de gramme au bout de 24 jours, etc…

1. On considère un ensemble de N_0 noyaux radio-actifs d'iode 131, de demi-vie T. On note :

$$\begin{aligned}
u_0 &= N_0 \quad \text{nombre initial de noyaux } (t = 0)\\
u_1 &= \text{nombre de noyaux restant après une période } (t = T)\\
u_2 &= \text{nombre de noyaux restant après deux périodes } (t = 2T)\\
&\vdots\\
u_n &= \text{nombre de noyaux restant après } n \text{ périodes } (t = nT)
\end{aligned}$$

a) Déterminer u_1 en fonction de u_0, puis u_2 en fonction de u_1.

b) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

d) Déterminer u_n en fonction de n et de N_0.

e) À l'aide d'une calculatrice, déterminer le nombre de périodes nécessaires pour que $99{,}99\%$ des atomes soient désintégrés.

f) Combien faut-il de périodes pour que tous les noyaux soient désintégrés ?

2. *a*) Application : la demi-vie de l'Iode 131 est $T = 8$ jours. À l'instant $t = 0$, on dispose de N_0 atomes d'Iode 131. À partir de quel instant la quantité initiale aura-t-elle été divisée par 1000 ?

b) Reprendre la question précédente avec le césium 137 dont la période est $T = 30$ ans.

c) Reprendre la question précédente avec le plutonium 239 dont la période est $T \approx 24\,000$ ans.