# Quelques fonctions rationnelles

**Exercice 1 : Coefficients indéterminés, intersection**

Soit $f$ la fonction définie sur $]-3;+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{x-1}{x+3}.$$

**1.** Déterminer les constantes réelles $a$ et $b$ telles que
$$f(x)=a+\frac{b}{x+3}$$
pour tout $x$ réel.

**2.** *a*) Déterminer l'intersection de $C_f$, la courbe représentative de $f$ avec la droite $\Delta$ d'équation $y=1$.

*b*) Étudier les positions relatives de $C_f$ et $\Delta$.

**Exercice 2 : Coefficients indéterminés**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Déterminer les constantes réelles $a$, $b$ et $c$, sachant que la courbe représentative de $f$ passe par les points $A(-1;-4)$, $B(0;-3)$ et $C(1;0)$.

**Exercice 3 : Coefficients indéterminés**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Déterminer les constantes réelles $a$, $b$ et $c$, sachant que la courbe représentative de $f$ passe par les points $A(2;1)$ et $B(1;2)$ et qu'elle admet une tangente horizontale en $A$.

**Exercice 4 : Tangente de coefficient directeur donné**

La courbe d'équation
$$y=\frac{3x-5}{x-2}$$
admet-elle une tangente de coefficient directeur $1/2$ ?
Si oui, préciser l'équation de cette tangente.

**Exercice 5 : Étude d'une fonction rationnelle**

**1.** Soit $C$ la courbe d'équation $y=\dfrac{2x+a}{x+b}$ où $a$ et $b$ sont des constantes réelles.
Déterminer les nombres $a$ et $b$ sachant que la courbe $C$ passe par les points $B(-1,6)$ et $C(4,1)$.

**2.** On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{2x-4}{x}$ et $\mathcal{H}$ sa courbe représentative.

*a*) Donner l'ensemble de définition de $f$ (justifier).

*b*) Calculer l'expression de la fonction dérivée $f'$.

*c*) Étudier le signe de $f'$. En déduire le tableau de variation de $f$.

*d*) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{H}$ et de la droite d'équation $y=2$. En particulier, préciser le nombre de point(s) d'intersection.

*e*) Déterminer les coordonnées de $A$, le point d'intersection de la courbe $\mathcal{H}$ et de l'axe $Ox$.

*f*) Calculer une équation de $T$, la tangente à $\mathcal{H}$ au point $A$.

*g*) Montrer que $\mathcal{H}$ admet en un point $D$ dont vous déterminerez les coordonnées, une autre tangente parallèle à $T$. Donner une équation de cette tangente.

*h*) Tracer ces tangentes et la courbe $\mathcal{H}$.