Probabilités

Définitions et propriétés élémentaires

1. Vocabulaire

On considère une expérience *aléatoire* (c'est à dire dont le résultat dépend du hasard). L'ensemble de toutes les issues de cette expérience est appelé *univers des possibles*; on le note souvent Ω.

On appelle *événement* toute partie de l'univers des possibles, un événement réduit à une seule issue étant appelé *événement élémentaire*. Le tableau qui suit résume les définitions et notations usuelles relatives à la notion d'événement :

langage ensembliste	**langage des probabilités**	**notation**
A est une partie de Ω	A est un événement	$A \subset \Omega$
A est vide	l'événement A est impossible	$A = \emptyset$
A est égal à Ω	l'événement A est certain	$A = \Omega$
C est la *réunion* de A et B	C est l'événement (A ou B)	$C = A \cup B$
C est l'*intersection* de A et B	C est l'événement (A et B)	$C = A \cap B$
A et B sont *disjoints*	A et B sont *incompatibles*	$A \cap B = \emptyset$
A et B sont *complémentaires*	A et B sont des événements *contraires*	$A = \overline{B} = \complement B$

2. Situation d'équiprobabilité

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit que l'on est dans une *situation d'équiprobabilité*. Dans ce cas, si $\operatorname{Card}\Omega = n$, la probabilité de chacun des événements élémentaire de Ω est $1/n$. En découle le fait que si l'événement A est composé de p événements élémentaires, alors la probabilité de A est $p(A) = p/n$, formule que l'on se rappelle souvent sous la forme

$$\boxed{p(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

En fait, la majeure partie des problèmes de Bts se situent sous l'hypothèse d'équiprobabilité (ou alors on s'y ramène, au moins en pensée, par exemple en numérotant les boules lors d'un tirage dans une urne), et l'une des premières choses à faire lors d'un exercice (après avoir lu son texte et traduit les hypothèses), consiste à dénombrer le cardinal de l'univers des possibles.

3. Les premiers théorèmes

Ils sont au nombre de trois et sont valables y compris dans les cas de non-équiprobabilité.

1. Si A et B sont des événements **incompatibles**, (i.e. si $A \cap B = \emptyset$) alors

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

2. Quel que soit l'événement A, la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ est donnée par

$$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A).}$$

3. Quels que soient les événements A et B, on a

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).}$$