Nombres complexes et géométrie

Exercice 1 : Triangle rectangle et triangle équilatéral

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

On considère les trois nombres complexes

$$a = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + i\sqrt{3}), \qquad b = \left[1, \frac{\pi}{6}\right], \qquad \text{et} \qquad c = \overline{b}$$

où $\overline{b}$ désigne le conjugué du nombre complexe b.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres b et c. (Autrement dit, écrire b et c sous la forme $x + iy$ avec x et y réels.)

2. Déterminer le module de chacun des 4 nombres

$$a, \qquad c, \qquad b - c, \qquad a - b.$$

3. On désigne par A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c.

a) Placer les points A, B et C dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (on demande une construction exacte pour B et C, et une construction approchée pour le point A).

b) Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.

c) Démontrer que le triangle $0AB$ est rectangle.

Exercice 2 : Complexes et géométrie dans un triangle...

1. On considère les trois nombres complexes z_A, z_B et z_C définis par :

$$z_A = \sqrt{3} + i, \qquad z_B = -\sqrt{3} + 3i \qquad \text{et} \qquad z_C = \left[\frac{4}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

a) Déterminer le module et un argument de z_A.

b) Déterminer le module et un argument de z_B.

c) Déterminer la forme algébrique de z_C.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm (ou 2 grands carreaux), placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

3. *a*) Calculer la distance AB.

b) Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle.

c) Déterminer l'affixe du milieu de $[AB]$.

d) Montrer que C est le centre de gravité du triangle OAB.