Devoir surveillé n° 4

durée : 2h

Exercice : Un problème de bac, *Bac sti gm, 1999*

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est tracée sur la feuille ci-jointe (**à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie**).

– Partie I – Étude de la fonction f –

1. D'après le graphique, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C. Le prouver par le calcul.

2. *a*) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la feuille ci-jointe.

3. *a*) Prouver que, pour tout x de $]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}.$$

b) Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.

c) Établir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

– Partie II – Position relative de deux courbes –

1. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x+2}{x}$$

et H la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Étudier rapidement la fonction g sur $]0,+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).

b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H.

2. *a*) Calculer $f(x)-g(x)$ et étudier son signe.

b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.

c) Étudier la position relative des deux courbes C et H.

3. Placer le point K et construire la courbe H sur la feuille ci-jointe.

– Partie III – Calcul d'une aire –

Soit α un réel tel que $\alpha > 1$.

On note $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par les courbes C et H et par les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$.

1. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2.$$

Vérifier que u est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

2. Calculer $A(\alpha)$ en cm^2.

3. En remarquant que $\ln\alpha$ est strictement positif, calculer α pour que $A(\alpha) = 8$ cm^2. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique (feuille ci-jointe) à rendre avec la copie.

Feuille annexe (à rendre avec la copie)