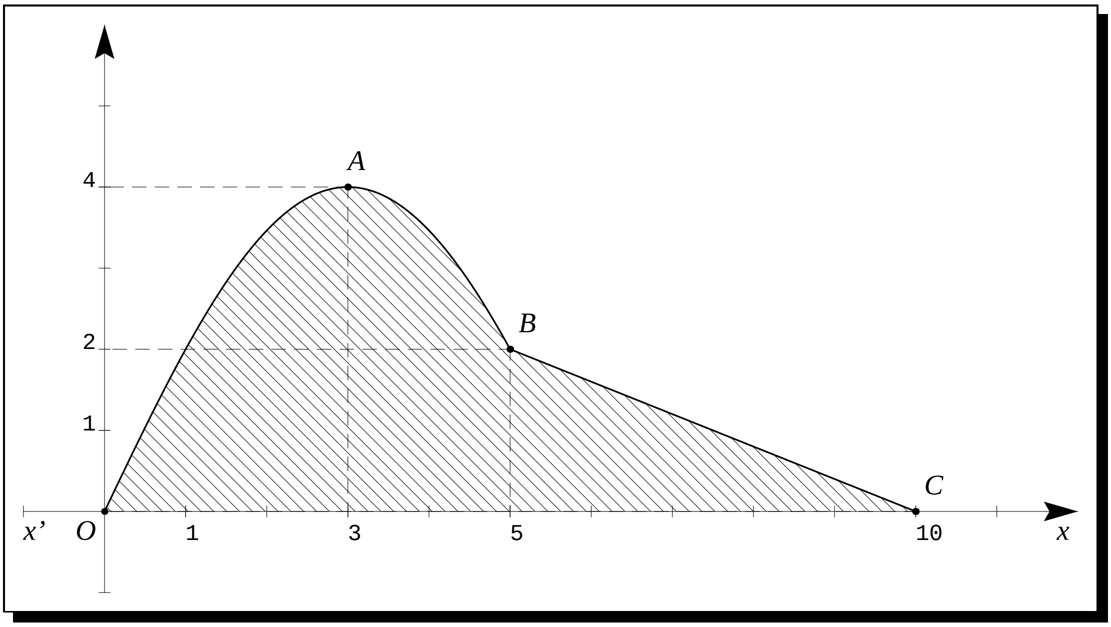
Devoir surveillé n° 3

durée : 2h

Exercice 1 : (*10 points*) *ex 81 p 44, Dimathème Term Sti/Stl, éditions Didier 1997*

Exercice 2 : (*10 points*) **Volume d'une toupie**

Le but de cet exercice est de calculer le volume d'une toupie. On obtient un modèle réduit de cette toupie par rotation autour de l'axe des abscisses (xx') de la surface hachurée ci-après (le modèle réduit représente la toupie en position « couchée »).



L'unité graphique est de 1 cm.

On donne les quatre points $A(3,4)$, $B(5,2)$, $C(10,0)$ et $D(5,0)$.

La partie inférieure du modèle réduit est le cône de révolution engendré par le triangle BCD.

La partie supérieure du modèle réduit est engendrée par la surface limitée par une courbe Γ ayant l'allure générale du schéma et vérifiant les conditions suivantes :

- La courbe (Γ) passe par les points O, A et B
- La courbe (Γ) a une tangente horizontale au point A.

1. Vérifier que la courbe d'équation

$$y = 4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) \qquad (x \text{ variant de } 0 \text{ à } 5)$$

remplit ces conditions. On admet dans la suite que c'est la courbe Γ.

2. *a*) En utilisant la formule donnant le volume d'un cône de révolution ou bien en introduisant la fonction dont la courbe représentative est le segment $[BC]$, calculer le volume en cm^3 de la partie inférieure du modèle réduit.

b) Linéariser $\sin^2\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, puis calculer le volume en cm^3 de la partie supérieure du modèle réduit.

3. Sachant que la hauteur OC de la toupie en vraie grandeur est de 30 cm, calculer la valeur exacte du volume en cm^3 de cette toupie, puis en donner une valeur approchée $0,1$ cm^3 près.

NB : *On rappelle que : si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, et si E est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, alors le volume V d'un solide de révolution engendré par la rotation de E autour de xx' est :*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$