Suites numériques

1. Suites – définition et représentation graphique

Une **suite** u, c'est une fonction qui n'est définie que pour les nombres entiers positifs (i.e. les nombres $n \in \mathbb{N}$). C'est à dire que $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, ... existent, mais $u(-1)$, $u(\frac{1}{2})$, $u(\sqrt{2})$, par exemple, n'existent pas. Dans ce cas on préfèrera la notation u_0 pour $u(0)$, u_1 pour $u(1)$, ..., u_n pour $u(n)$.

Exemple (1) .

Les fonctions u et v définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par

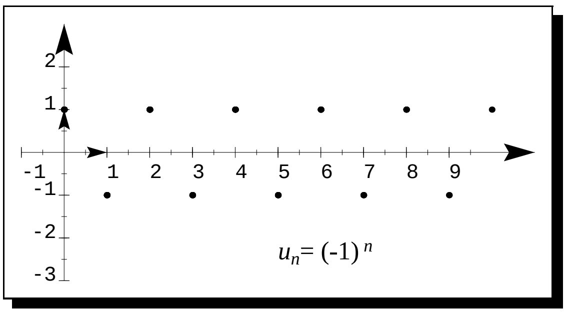
$$u_n = (-1)^n, \qquad \text{et} \qquad v_n = -1 + n$$

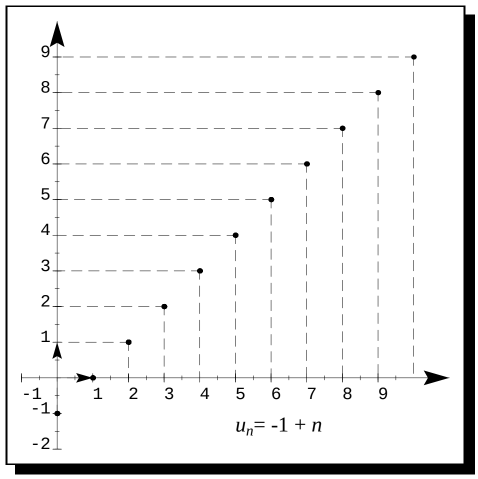
sont des suites. À noter que l'on peut également définir ces suites par récurrence, c'est à dire avec des définitions du type

$$(u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = -u_n) \qquad \text{et} \qquad (v_0 = -1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 1)$$

■

La représentation graphique d'une suite se fait de la même façon que pour une fonction « classique », en faisant bien attention qu'ici nous n'avons plus une courbe continue mais au contraire des points distincts. Par exemple voici les représentations graphiques des suites u et v données dans l'exemple (1) :





2. Suites arithmétiques

Une suite est dite **arithmétique** si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit si tous les points de la représentation graphique sont alignés. On nomme alors cette différence **raison** de la suite et on la note habituellement r.

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors on a pour tout entier $n \geqslant 0$

- $\boxed{u_n = u_0 + nr}$ ou encore • $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r.}$

■

Propriétés

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

- Si le premier terme de cette suite est u_1 alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n \text{ termes}} = n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right)$$

- En général on a (et c'est la formule à retenir) :

$$\boxed{\text{Somme} = (\text{nombre de termes}) \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)}$$

■

3. Suites géométriques

Une suite est dite **géométrique** si le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Ce rapport est alors appelé **raison** de la suite et il est souvent noté q.

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, on a pour tout $n \geqslant 0$

- $\boxed{u_n = u_0\, q^n}$ ou encore • $\boxed{u_n = u_1\, q^{n-1}.}$

■

Propriétés

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}_{n+1 \text{ termes}} = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

- Si le premier terme de cette suite est u_1 alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}_{n \text{ termes}} = u_1\left(\frac{1-q^{n}}{1-q}\right)$$

- En général on a (et c'est la formule à retenir) :

$$\boxed{\text{Somme} = (\text{premier terme}) \times \left(\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\right)}$$

■