Fonction logarithme népérien

Exercice : Fonction ln : étude et résolution approchée d'équation

On désigne par f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + (x+1)\ln x.$$

1. *a*) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x.$$

   b) En déduire que $g(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.

2. *a*) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude. Pour la limite en $+\infty$, on pourra vérifier auparavant que l'on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = x(-1 + \ln x) + \ln x.$$

   b) Établir que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

   En déduire les variations de f.

3. *a*) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. (Justifier.)

Analyse (8) tgm 1 13 décembre2002

Fonction logarithme népérien

Exercice : Fonction ln : étude et résolution approchée d'équation

On désigne par f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + (x+1)\ln x.$$

1. *a*) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x\ln x.$$

   b) En déduire que $g(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$.

2. *a*) Étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude. Pour la limite en $+\infty$, on pourra vérifier auparavant que l'on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = x(-1 + \ln x) + \ln x.$$

   b) Établir que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$

   En déduire les variations de f.

3. *a*) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. (Justifier.)