Dérivation des fonctions numériques

Exercice 1 : Calculs de dérivées

Calculer la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

- **un polynôme :** f définie sur $\mathbb{R}$ par • $f(x) = -3x^4 + 6x^2 + 1$
- **un produit de polynômes :** f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-x+2)(3x+7)^2$
- **un inverse :** f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
- **une somme d'inverses :** f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$.
- **une fraction :** f définie sur $]3; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x-7}{-x+3}$.
- **une puissance de fonction trigo :** f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x$.

Exercice 2 : Calculs de dérivées

Pour chacune des fonction f suivantes, déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

a) $f(x) = 6x^3 - 7x^2 + 8$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

c) $f(x) = (7-3x)^2$.

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2+1}$

f) $f(x) = \cos^3(2x)$

Exercice 3 : Calculs de dérivées – Études de signes

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer la fonction dérivée f' et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$ (ou sur l'intervalle précisé le cas échéant).

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4x^2 - 5x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ pour $x \neq -\dfrac{1}{3}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-6}{x+1}$ pour $x \neq -1$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$

e) $f(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ pour $x \neq -1$

f) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{1+x}$ pour $x \neq -1$

g) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ pour $x \geqslant \dfrac{1}{2}$

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2}{x+1}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{1}{x}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+1}$

k) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x \in [0, \pi]$

l) $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $x \in [0, \pi]$

Exercice 4 : Étude d'une fonction rationnelle. (*Bac F_1, 1991*)

On considère f, la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ par

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1 cm (ou 1 grand carreau).

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.

2. *a*) Montrer que la courbe C_f admet la droite Δ d'équation $y = x + 2$ pour asymptote.

b) Étudier la position de C_f par rapport à Δ.

3. *a*) Étudier la limite de f en 2.

b) En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe C_f.

4. *a*) Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]2, +\infty[$. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5. Représenter la courbe C_f dans le repère donné.

Voir la suite dans l'Anabac Nathan non corrigé, 1998, Stt-Sti, p 173