Corrigé du devoir surveillé n^{o} 3

Exercice 1 : Étude d'une fonction exponentielle

a) On a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-x^2\right)e^x = \boxed{-\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)} \qquad \text{puisque} \qquad \begin{cases} \lim_{+\infty}\left(1-x^2\right) = -\infty \\ \lim_{+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-x^2\right)e^x = \lim_{x\to-\infty} e^x - x^2e^x = \boxed{0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)} \qquad \text{puisque} \qquad \begin{cases} \lim_{-\infty} e^x = 0 \\ \lim_{-\infty} x^2e^x = 0 \quad \text{(cf cours)} \end{cases}$$

b) On trouve $\boxed{f'(x) = (-x^2-2x+1)e^x}$, qui est du signe du polynôme $(-x^2-2x+1)$ puisque e^x est toujours positif. La méthode du discriminant Δ (ici égal à $8 = (2\sqrt{2})^2$) nous donne les 2 racines

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -1+\sqrt{2}$$

et nous garantit que ce polynôme est positif entre ces racines (signe de $-a$). On a ainsi le signe de la dérivée f' puis le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\approx -0,43$	$\nearrow$	$1,25$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2 : Étude d'une fonction exponentielle

1. En $-\infty$: On a $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -7}$ puisque

$$f(x) = -3e^{2x}+3e^x-7 \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to\infty} -3e^{2x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} 3e^x = 0$$

En $+\infty$: Là c'est plus difficile puisque l'écriture proposée pour $f(x)$ donne *a priori* une forme indéterminée $\infty-\infty$. On factorise alors par le terme « dominant » et il vient :

$$f(x) = e^{2x}\left(-3+3e^{-x}-7e^{-2x}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty} \qquad \text{puisque} \qquad \begin{cases} \lim_{+\infty} e^{-x} = \lim_{+\infty} e^{-2x} = 0 \\ \lim_{+\infty} e^{2x} = +\infty \end{cases}$$

2. On trouve $\boxed{f(x) = -6e^{2x}+3e^x = e^x(-6e^x+3)}$, du signe de $-6e^x+3$ pûisque e^x est toujours positif (strictement). D'où le tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-7	$\nearrow$	$-6,25$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3 : Étude d'une fonction rationnelle

1. On trouve $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ puisque

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

2. *a*) On trouve facilement $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 1}{x^2}}$ par réduction au même dénominateur de l'expression de f proposée.

b) On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty} \qquad \text{puisque} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 0} x^3 + 3x - 1 = -1 \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0^+ \end{cases}$$

Géométriquement, cette limite signifie que la droite d'équation $\boxed{x = 0 \text{ est asymptote verticale à } C_f}$

3. *a*) Et on a $\boxed{\Delta \text{ asymptote à } C_f \text{ en } +\infty}$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$$

d'après les calculs du **1.**.

b) Chercher l'intersection de la droite Δ avec la courbe C_f revient à résoudre le système

$$\begin{cases} y = x \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = x + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 0 = \dfrac{3x - 1}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 0 = 3x - 1 \end{cases}$$

Ce système n'admet qu'un couple soltion, d'où les coordonnées de l'unique point d'intersection : $\boxed{K\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

4. *a*) Le calcul de $f'(x)$ donne

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f'(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}}.$$

Or le développement de l'expression proposée donne

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x+2)}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3} = f'(x).$$

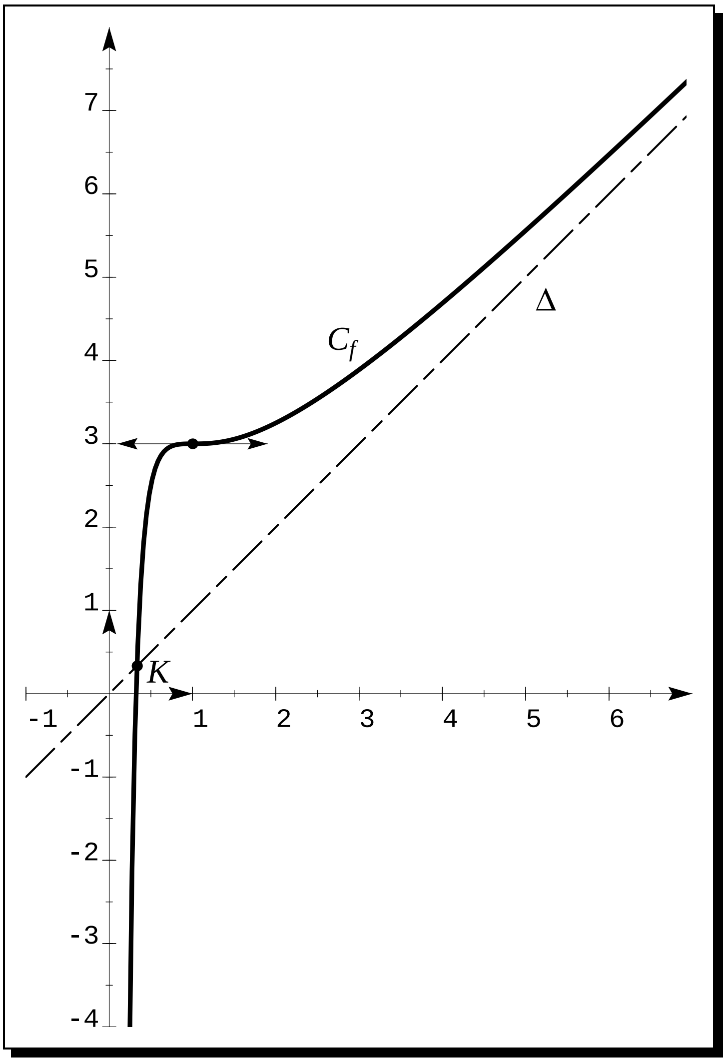
D'où le résultat demandé.

b) Pour l'étude du signe de la dérivée, on utilise la forme factorisée de f' puis on fait un tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

c) Quand au calcul de la tangente, on utilise la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Sachant que $f'(1) = 0$ et que $f(1) = 3$, il vient $\boxed{T\ : y = 3}$.

5.



Exercice 4 : Recherche d'asymptote

1. Par identification, il est assez clair que l'on devra avoir

$$\frac{x^2-x-6}{2+x}=ax+b \qquad \text{et} \qquad \frac{2e^{-x}}{2+x}=\frac{ce^{-x}}{2+x}.$$

On a donc immédiatement $\boxed{c=2}$. Pour déterminer a et b, on peut : soit effectuer la division euclidienne de x^2-x-6 par $2+x$, soit procéder par réduction au même dénominateur puis identification des coefficients :

$$\frac{x^2-x-6}{2+x}=ax+b \iff \frac{x^2-x-6}{2+x}=\frac{(ax+b)(2+x)}{2+x}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b}{2+x}$$

$$\iff x^2-x-6=ax^2+(2a+b)x+2b \iff \begin{cases}1=a\\-1=2a+b\\-6=2b\end{cases}$$

d'où l'on tire $\boxed{(a,b)=(1,-3)}$, soit encore $\boxed{f(x)=x-3+\dfrac{2e^{-x}}{2+x}}$.

2. On a alors

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-3)\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{-x}}{2+x}=0 \qquad \text{puisque} \qquad \begin{cases}\lim_{+\infty}e^{-x}=0\\ \lim_{+\infty}2+x=+\infty\end{cases}$$

ce qui prouve que la droite d'équation $y=x-3$ est $\boxed{\text{asymptote en } +\infty \text{ à la courbe de } f}$.
