Brevet de Technicien Supérieur

Session 2002

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1 : Assurances d'une flotte de véhicules

1. On a donc X qui suit $\mathcal{P}(0,28)$.

a) Il vient $p(A) = p(X = 0) = e^{-0,28}$, soit $\boxed{p(A) \approx 0,756}$.

b) Il vient

$$\begin{aligned} p(B) = p(X \leqslant 2) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= e^{-0,28} + 0,28e^{-0,28} + \frac{0,28^2}{2}e^{-0,28} \\ &= e^{-0,28}\left(1 + 0,28 + \frac{0,28^2}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(B) \approx 0,997}. \end{aligned}$$

2. a) On a 15 tirages **indépendants** (puisqu'assimilés à des tirages avec remise), chacun d'entre eux n'a que **2 issues possibles** (E ou $\overline{E}$), et la variable Y **compte le nombre d'événements** E, la probabilité de E étant de $0,6$. On en conclut que la variable Y suit la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}(15; 0,6)}$.

b) Il vient

$$\begin{aligned} p(Y = 10) &= C_{15}^{10} \times (0,6)^{10} \times (0,4)^5 \\ &= C_{15}^{5} \times (0,6)^{10} \times (0,4)^5 \\ &= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5!} \times (0,6)^{10} \times (0,4)^5 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(Y = 10) \approx 0,186}. \end{aligned}$$

3. On a C qui suit la loi $\mathcal{N}(1\,200; 200)$, donc la variable T définie par

$$T = \frac{C - 1\,200}{200}$$

suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. D'où

$$\begin{aligned} p(1\,000 \leqslant C \leqslant 1\,500) &= p\left(\frac{1\,000 - 1\,200}{200} \leqslant \frac{C - 1\,200}{200} \leqslant \frac{1\,500 - 1\,200}{200}\right) \\ &= p\left(-1 \leqslant T \leqslant \frac{3}{2}\right) \\ &= \Pi(1,5) - \Pi(-1) = \Pi(1,5) + \Pi(1) - 1 \\ &= 0,933\,2 + 0,841\,3 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(1\,000 \leqslant C \leqslant 1\,500) \approx 0,775}. \end{aligned}$$

4. a) Une estimation ponctuelle de p est $\boxed{f = \frac{91}{100} = 0,91}$.

b) On sait que F suit la loi normale $\mathcal{N}(p, \sigma') = \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$. Or pour calculer un intervalle de confiance, nous avons besoin d'une estimation de l'écart type σ'. Une estimation ponctuelle de p étant $f = 0,91$ sur un échantillon de taille $n = 100$, le cours nous dit qu'une estimation ponctuelle de σ' est

$$s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \times \sqrt{\frac{f(f-1)}{n}} = \sqrt{\frac{f(f-1)}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,91 \times 0,09}{99}}$$

soit $s \approx 0,287\,6$.

Sachant donc que F suit la loi normale $\mathcal{N}(p, \sigma')$, on en déduit que la variable Z définie par $Z = (F - p)/\sigma'$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, et nous cherchons le réel a tel que

$$\begin{aligned} & p(p - a \leqslant F \leqslant p + a) = 0,95 \\ \iff \quad & p\left(-\frac{a}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \frac{a}{\sigma'}\right) = 0,95 = 2\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right) - 1 \\ \iff \quad & \frac{a}{\sigma'} = 1,96 \quad \iff \quad a = 1,96\sigma' \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation ponctuelle s de σ', il vient $a \approx 0,056\,4$. En utilisant maintenant l'estimation ponctuelle f de p, on trouve comme $\boxed{\text{intervalle confiance à 95\% : } [0,854; 0,966]}$.

Exercice 2 : Équation différentielle, développement limité, relations fonctionnelles

A **1.** L'équation caractéristique associée à l'équation (E_0) est $r^2 - r - 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 9$ et admettant les deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. On en déduit que la solution générale de E_0 est :

$$\boxed{y_0(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} \text{ où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques}}.$$

2. On a

$$h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}, \qquad h'(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}, \qquad h''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$

d'où

$$h'' - h' - 2h = (-6x - 4)e^{-x},$$

ce qui prouve que $\boxed{h \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

3. On en déduit que la solution générale de (E) est $y = y_0 + h$, soit

$$\boxed{y(x) = (x^2 + 2x + A)e^{-x} + Be^{2x} \text{ où } A \text{ et } B \text{ constantes réelles quelconques}}.$$

4. Si $f(x) = (x^2+2x+A)e^{-x}+Be^{2x}$, alors $f'(x) = (-x^2-A+2)e^{-x}+2Be^{2x}$. Les deux conditions initiales nous fournissent alors le système

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} f(0) = A + B = 1 \\ f'(0) = 2B + 2 - A = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} (1) \\ (1)+(2) \end{array} \begin{cases} A + B = 1 \\ 3B + 2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow (A, B) = (1, 0).$$

D'où la solution particulière f cherchée : $\boxed{f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} = (x + 1)^2 e^{-x}}$.

B **1.** *a*) Il vient

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x + 1)^2 e^{-x} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \lim_{-\infty}(x + 1)^2 = +\infty \\ \lim_{-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

d'où $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

b) On a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}}$ d'après le cours. Or $f(x) = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}$. On en déduit donc que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

c) Graphiquement, ce dernier point signifie que $\boxed{\text{l'axe } Ox \text{ est une asymptote horizontale en } +\infty \text{ pour la courbe } C}$.

2. *a*) Vu au **A** **4.** en prenant $A = 1$, on trouve bien $\boxed{f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}}$.

b) *c*) L'expression e^{-x} est toujours strictement positive, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$, polynôme du second degré qui se factorise en $(1 - x)(1 + x)$. Il admet donc les deux racines réelles -1et 1 et il est positif entre ces racines (signe de $-a$). D'où la tableau récapitulatif suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	0

3. *a*) On sait que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to0} \varepsilon(t) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0}$$

b) Il vient

$$\begin{aligned}(1 + 2x + x^2)e^{-x} &= \left(1 + 2x + x^2\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= \left(1 + 2x + x^2 - x - 2x^2 + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

c) Pour avoir l'équation de la tangente en 0, il suffit de regarder le développement limité d'ordre 1, d'où l'équation cherchée $\boxed{T\ : y = 1 + x}$. Quand à la position relative, elle est donnée par le signe de la différence entre $f(x)$ et $1+x$. Au voisinage de 0, cette différence est égale à $-\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, et elle est toujours négative (puisque x^2 positif) pour peu que x soit suffisamment proche de 0. On en conclut que, localement, $\boxed{T \text{ est au dessus de } C \text{ au voisinage de } 0}$.

$\boxed{\text{C}}$ **1.** *a*) La fonction f étant solution de l'équation (E), elle vérifie la relation

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = (-6x - 4)e^{-x} \qquad \text{d'où} \qquad 2f(x) = f''(x) - f'(x) + (6x + 4)e^{-x}$$

$$\text{et donc} \qquad \boxed{f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)e^{-x}\right]}$$

b) On a

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x + 10)e^{-x}\right] \qquad \text{d'où} \qquad F'(x) = \frac{1}{2}\underbrace{\left[f''(x) - f'(x) - (-6x - 4)e^{-x}\right]}_{= 2f(x) \text{ d'après } a)}$$

et on a bien $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

On a

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x} \qquad \text{et} \qquad f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x + 10)e^{-x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - x^2 - x^2 - 2x - 1 - (6x + 10)\right) e^{-x} \\ &= \frac{1}{2}(-2x^2 - 8x - 10)e^{-x} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}}. \end{aligned}$$

2. On a

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = -5 + 2e}.$$