

## Brevet de Technicien Supérieur – groupement B

### Session 1999

durée : 2h

**Spécialités :** Aménagement finition, Assistant technique d'ingénieur, Bâtiment, Charpente couverture, Construction navale, Domotique, Enveloppe du bâtiment : façade-étanchéité, Équipement technique-énergie, Étude et économie de la construction, Géologie appliquée, Industries graphiques : communication graphique, Industries graphiques : productique graphique, Maintenance et après-vente automobile, Maintenance industrielle, Mécanique et automatismes industriels, Microtechniques, Mise en forme des alliages moulés, Moteurs à combustion interne, Productique mécanique, Réalisation d'ouvrages chaudronnés, Travaux publics.

#### Exercice 1 : (9 points) Production industrielle et contrôle de qualité

*Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces :  $P_1$  et  $P_2$ .

1. Une pièce  $P_1$  est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.

On note  $L$  la variable aléatoire qui, à chaque pièce  $P_1$  choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que  $L$  suit une loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.

Déterminer, à  $10^{-2}$  près, la probabilité qu'une pièce  $P_1$  soit bonne.

2. On note  $A$  l'événement : « une pièce  $P_1$  choisie au hasard dans la production des pièces  $P_1$  est défectueuse ».

On note de même  $B$  l'événement : « une pièce  $P_2$  choisie au hasard dans la production des pièces  $P_2$  est défectueuse ».

On admet que les probabilités des deux événements  $A$  et  $B$  sont  $p(A) = 0,03$  et  $p(B) = 0,07$  et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à  $10^{-4}$  près, la probabilité de chacun des événements suivants :

$E_1$  : « les deux pièces du module sont défectueuses » ;

$E_2$  : « au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;

$E_3$  : « aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse » ;

3. Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de 10 modules associe le nombre de modules réalisant l'événement  $E_3$  défini au 2.

On suppose que la probabilité de l'événement  $E_3$  est 0,902.

- a) Expliquer pourquoi  $X$  suit une loi binômiale ; déterminer les paramètres de cette loi.  
b) Calculer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement  $E_3$ .

4. Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces  $P_2$ .

Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces  $P_2$  prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que  $\bar{X}$  suit la loi normale :

de moyenne inconnue  $\mu$  et d'écart type  $\frac{\sigma}{\sqrt{60}}$  avec  $\sigma = 0,084$ .

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces  $P_2$  d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que la valeur approchée arrondie à  $10^{-3}$  près de la moyenne  $\bar{x}$  de cet échantillon est  $\bar{x} = 4,012$ .

- a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à  $10^{-3}$  près, de la moyenne  $\mu$  des diamètres des pièces  $P_2$  produites pendant cette journée.  
b) Déterminer un intervalle de confiance centré en  $\bar{x}$  de la moyenne  $\mu$  des diamètres des pièces  $P_2$  produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance de 95%.  
c) On considère l'affirmation suivante : « la moyenne  $\mu$  est obligatoirement entre 3,991 et 4,033 ». Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

<b>Exercice 2 : (11 points) Équation différentielle</b>
---

Les parties A. et B. peuvent être traitées de façon indépendante

**– Partie A – Résolution d'une équation différentielle –**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

où  $y$  désigne une fonction de la variable  $x$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $y'$  la fonction dérivée de  $y$ , et  $y''$  sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle

$$(E') \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Déterminer les constantes réelles  $a, b, c$  pour que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

soit une solution particulière de l'équation (E)

3. Dédire du 1. et du 2. l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution  $f$  de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = e + \frac{3}{2}.$$

**– Partie B – Étude d'une fonction –**

Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions de la variable  $x$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  et  $\mathcal{P}$  la courbe représentative de  $g$  dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$ .

Interpréter graphiquement le dernier résultat.

2. Étudier sur  $\mathbb{R}$  la position relative des deux courbes  $C$  et  $\mathcal{P}$ .

3. a) Démontrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$ .

b) Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. a) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) ; les valeurs approchées seront arrondies à  $10^{-2}$  près.

b) Construire la courbe  $C$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe  $\mathcal{P}$ .

5. a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en  $\text{cm}^2$  de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C$ , la parabole  $\mathcal{P}$  et les droites d'équations  $x = -3$  et  $x = -2$  est  $A = 4(-4e^{-3} + 3e^{-2})$ .

b) Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $A$ .

**Feuille annexe (à rendre avec la copie)****– Partie B –**

4. a)

$x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$									

b)

