Table des matières

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires

Sommaire

1 Le premier ordre

1.1 Un peu de vocabulaire

Définition 1.1 (Équation différentielle linéaire du premier ordre).
On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, une équation du type :

$$x' = a(t)\,x + b(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où a et b sont des fonctions continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}$ étant l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 1.2 (Équation homogène).
On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée à $(\mathcal{E})$, l'équation :

$$x' = a(t)\,x \qquad (\mathcal{H})$$

Remarque. Dans ces définitions, le coefficient de x' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en x'*.

Si ce n'est pas le cas, on divise l'équation par le coefficient de x'. Par exemple, $t\,x' + x = 1$ doit s'écrire $x' = -t^{-1}\,x + t^{-1}$ et l'intervalle I considéré est l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Tous les théorèmes de cette section sont relatifs à des équations *normalisées.*

Définition 1.3 (J-solution).
Si J est un sous-intervalle de I, une *J-solution* de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$, est une fonction x de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que :

$$\forall t \in J,\ x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t) \quad \big(\text{resp. } x'(t) = x(t)\big)$$

Remarque. Si J_1 est un sous-intervalle de J, la restriction à J_1 de toute J-solution de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$), est une J_1-solution de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$).

1.2 Résolution de l'équation homogène

1.2.1 Le résultat

Théorème 1.1 (fondamental).
Toutes les solutions de $(\mathcal{H})$ sont définies sur I, ce sont des I-solutions.

L'ensemble des I-solutions de $(\mathcal{H})$ constituent une droite vectorielle sur $\mathbf{K}$ dirigée par la fonction

$$t \in I \mapsto \exp\big(A(t)\big)$$

où A est une primitive de a sur I.

$$\boxed{x \textit{ est une } I\textit{-solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists k \in \mathbf{K},\ \forall t \in I,\ x(t) = k\,\exp\big(A(t)\big)}$$

Preuve. Il suffit de démontrer que $t \in I \mapsto x(t)\,\exp\big(-A(t)\big)$ est une fonction constante, si, et seulement si, x est solution de $(\mathcal{H})$. Or

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\Big(x(t)\,\exp\big(-A(t)\big)\Big) &= x'(t)\,\exp\big(-A(t)\big) - x(t)\,A'(t)\,\exp\big(-A(t)\big)\\ &= \big(x'(t) - a(t)\,x(t)\big)\exp\big(-A(t)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \text{ est solution de } \mathcal{H} &\iff x' = a(t)x\\ &\iff \frac{d}{dt}\Big(x(t)\,\exp\big(-A(t)\big)\Big) = 0 \qquad \big(\exp\big(-A(t)\big) \text{ ne s'annule pas}\big)\\ &\iff \exists k \in \mathbf{K}, \forall t \in I, x(t)\,\exp\big(-A(t)\big) = k\end{aligned}$$

car une fonction dont la dérivée est nulle sur un **intervalle** est constante. cqfd

Remarques.

Toute solution de $(\mathcal{H})$ nulle en un point de I est identiquement nulle sur I.

Deux solutions de $(\mathcal{H})$ qui coïncident en un point de I, sont identiques sur I.

Les I-solutions de l'équation différentielle $x' + a(t)\,x = 0$ sont les fonctions

$$t \in I \mapsto k\,\exp\bigl(-A(t)\bigr)$$

où A est une primitive de a sur I et k une constante de $\mathbf{K}$.

1.2.2 Le problème de Cauchy

Pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{K}$, il existe une unique solution x de $(\mathcal{H})$ telle que $x(t_0) = x_0$, à savoir

$$x : t \in I \mapsto x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

1.3 Résolution de l'équation complète

1.3.1 Le principe

Théorème 1.2. *Soit X une I-solution de $(\mathcal{E})$; alors, x est une I-solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $x - X$ est une I-solution de $(\mathcal{H})$.*

Preuve. On a $X' = a(t)X + b(t)$ et

$$\begin{aligned} (x - X)' = a(t)(x - X) &\iff x' - X' = x' - \bigl(a(t)\,X + b(t)\bigr) = a(t)(x - X) \\ &\iff x' = a(t)x + b(t) \\ &\iff x \text{ est une } I\text{-solution de } (\mathcal{E}) \end{aligned}$$

cqfd

Remarque. On obtient les I-solutions de $(\mathcal{E})$ en ajoutant à une I-solution (particulière) de $(\mathcal{E})$ une I-solution (quelconque) de $(\mathcal{H})$.

Comment trouver cette solution particulière ? C'est l'objet de la méthode de la variation de la constante.

1.3.2 Méthode de la variation de la constante

On pose $x = z\,\exp(A)$, soit $z(t) = x(t)\exp\bigl(A(t)\bigr)$ pour $t \in I$ (on effectue un *changement de fonction inconnue*) ; z est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si, x est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) &\iff z'(t)\exp\bigl(A(t)\bigr) + z(t)\,A'(t)\,\exp\bigl(A(t)\bigr) = a(t)z(t)\exp\bigl(A(t)\bigr) + b(t) \\ &\iff z'(t)\exp\bigl(A(t)\bigr) = b(t) \end{aligned}$$

Ainsi x est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, z est solution de $z'\exp(A) = c$, *i.e.*

$$\exists k \in \mathbf{K},\ \forall t \in I,\ z(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\bigl(-A(u)\bigr)c(u)\,\mathrm{d}u + k$$

Remarquez que z est une primitive (sur I) de la fonction continue (sur I) $t \mapsto c(t)\exp\bigl(-A(t)\bigr)$, ce qui donne le

Théorème 1.3. *Toute solution de $(\mathcal{E})$ est définie sur I.*
L'ensemble des I-solutions de $(\mathcal{E})$ constituent une droite affine sur $\mathbf{K}$.

$$\boxed{\begin{aligned} &x \text{ est une } I\text{-solution de } (\mathcal{E}) \iff \\ &\qquad \exists k \in \mathbf{K},\ \forall t \in I,\ x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \exp\big(-A(u)\big) c(u)\,\mathrm{d}u + k \right) \exp\big(A(t)\big) \end{aligned}}$$

1.3.3 Le problème de Cauchy

Pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbf{K}$, il existe une unique solution x de $(\mathcal{E})$ telle que $x(t_0) = x_0$, à savoir

$$t \in I \mapsto \left(\int_{t_0}^{t} \exp\big(-A(u)\big) c(u)\,\mathrm{d}u + x_0 \right) \exp\big(A(t)\big) \text{ avec } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarques. Deux solutions de $(\mathcal{E})$ qui coïncident en un point de I, sont identiques sur I.
Si J est un sous-intervalle de I, toute J-solution de $(\mathcal{E})$ se prolonge en une unique I-solution de $(\mathcal{E})$.

1.3.4 Principe de superposition des solutions

Proposition 1.4. *Si x_1 est solution de $x' = a(t)\,x + b_1(t)$ et x_2 solution de $x' = a(t)\,x + b_2(t)$, alors $(x_1 + x_2)$ est solution de $x' = a(t)\,x + \big(b_1(t) + b_2(t)\big)$*

Preuve.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)' = x_1' + x_2' &= \big(a(t)\,x_1 + b_1\big) + \big(a(t)\,x_2 + b_2\big) \\ &= a(t)\big(x_1 + x_2\big) + (b_1 + b_2) \end{aligned}$$

cqfd

2 Le deuxième ordre à coefficients constants

2.1 Un peu de vocabulaire

Définition 2.1 (Équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants).
On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants*, une équation du type :

$$x'' + a\,x' + b\,x = c(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où a et b sont des scalaires de $\mathbf{K}$ et c une fonction continue d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Définition 2.2 (Équation homogène).
On appelle *équation homogène associée à* $(\mathcal{E})$, l'équation

$$x'' + a\,x' + b\,x = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

Définition 2.3 (J-solution).
Si J est un sous-intervalle de I, une *J-solution* de $(\mathcal{E})$ est une fonction x de classe $\mathcal{C}^2$ sur J telle que :

$$\forall t \in J, \quad x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$$

2.2 Résolution de l'équation homogène

2.2.1 Équation caractéristique

Proposition 2.1. *$t \in \mathbf{R} \mapsto \exp(rt)$ est une $\mathbf{R}$-solution de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, r est solution de $r^2 + ar + b = 0$; cette équation est appelée* équation caractéristique.

Preuve. Puisque $x(t) = \exp(rt)$, on obtient $x'(t) = r\exp(rt)$ et $x''(t) = r^2\exp(rt)$. Alors, $0 = x''(t)+ax'(t)+bx(t) = (\exp rt)(r^2+a\,r+b) \iff r^2+a\,r+b = 0$ car $\forall t \in \mathbf{R}, \exp(rt) \neq 0$. cqfd

2.2.2 Dimension de l'espace des solutions

Théorème 2.2. *Les solutions de $(\mathcal{H})$ sont définies sur $\mathbf{R}$, ce sont des $\mathbf{R}$-solutions ; elles constituent un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2.*

Preuve. Soit r une solution de l'équation caractéristique $r^2+ar+b = 0$. On utilise le changement de fonction : $x = \exp(rt)y$. En dérivant et en substituant x dans l'équation, on trouve :

$$\begin{aligned}
x' &= r\exp(rt)y + \exp(rt)y' \\
x'' &= r^2\exp(rt)y + 2r\exp(rt)y' + \exp(rt)y'' \\
0 &= \big(r^2\exp(rt)y + 2r\exp(rt)y' + \exp(rt)y''\big) + a\big(r\exp(rt)y + \exp(rt)y'\big) + b\exp(rt)y \\
&= (r^2+ar+b)\exp(rt)y + (2r+a)\exp(rt)y' + \exp(rt)y'' \\
&= 0 + (2r+a)\exp(rt)y' + \exp(rt)y''
\end{aligned}$$

La fonction x est donc solution de $(\mathcal{H})$ si, et seulement si, $(2r+a)y' + y'' = 0$.

Si r est une racine simple de l'équation caractéristique, $2r+a$ n'est pas nul, et

$$\begin{aligned}
&(2r+a)y' + y'' = 0 \\
&\qquad \iff \exists k_1 \in \mathbf{K},\ \forall t \in \mathbf{R},\ y'(t) = k_1\exp\big(-(2r+a)t\big) \\
&\qquad \iff \exists (k_1,k_2) \in \mathbf{K}^2,\ \forall t \in \mathbf{R},\ y(t) = -\frac{k_1}{2r+a}\exp\big(-(2r+a)t\big) + k_2 \\
&\qquad \iff \exists (\lambda_1,k_2) \in \mathbf{K}^2,\ \forall t \in \mathbf{R},\ x(t) = \exp(rt)y(t) = \lambda_1\exp\big(-(r+a)t\big) + k_2\exp(rt)
\end{aligned}$$

Rappelons que $-(r+a)$ est l'autre racine (simple) de l'équation caractéristique.

Si r est une racine double de l'équation caractéristique, $2r+a$ est nul, et

$$\begin{aligned}
y'' = 0 &\iff \exists (k_1,k_2) \in \mathbf{K}^2,\ \forall t \in \mathbf{R},\ y(t) = k_1 + k_2 t \\
&\iff \exists (k_1,k_2) \in \mathbf{K}^2,\ \forall t \in \mathbf{R},\ x(t) = \exp(rt)y(t) = (k_1+k_2t)\exp(rt)
\end{aligned}$$

cqfd

2.2.3 Le cas complexe

Proposition 2.3. *Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.*

Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(r_1t)$ et $t \mapsto \exp(r_2t)$ constituent une base de l'espace des $\mathbf{R}$-solutions de $(\mathcal{H})$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta \neq 0 : \\ x \textit{ est une } \mathbf{R}\textit{-solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1,k_2) \in \mathbf{C}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = k_1\exp(r_1t) + k_2\exp(r_2t) \end{array}}$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r. Dans ce cas, $t \mapsto t\exp rt$ est une $\mathbf{R}$-solution de $(\mathcal{H})$ et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(rt)$ et $t \mapsto t\exp(rt)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta = 0 : \\ x \textit{ est une } \mathbf{R}\textit{-solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{C}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = (k_1 + k_2 t)\exp(rt)\end{array}}$$

2.2.4 Le cas réel

Proposition 2.4. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(r_1 t)$ et $t \mapsto \exp(r_2 t)$ constituent une base de l'espace des $\mathbf{R}$-solutions de $(\mathcal{H})$.*

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta > 0 : \\ x \textit{ est une } \mathbf{R}\textit{-solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = k_1 \exp(r_1 t) + k_2 \exp(r_2 t)\end{array}}$$

Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$, et les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ et $t \mapsto \exp(\alpha t)\sin(\beta t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta < 0 : \\ x \textit{ est une } \mathbf{R}\textit{-solution de } (\mathcal{H}) \\ \qquad \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = \big(k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)\big)\exp(\alpha t)\end{array}}$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double réelle r ; les deux fonctions non proportionnelles $t \mapsto \exp(rt)$ et $t \mapsto t\exp(rt)$ constituent une base de l'espace des $\mathbf{R}$-solutions de $(\mathcal{H})$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta = 0 : \\ x \textit{ est une } \mathbf{R}\textit{-solution de } (\mathcal{H}) \iff \exists (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, x(t) = (k_1 + k_2 t)\exp(rt)\end{array}}$$

2.3 Résolution de l'équation complète

2.3.1 Le principe

Théorème 2.5. *Soit X une I-solution de $(\mathcal{E})$; alors, x est une I-solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $x - X$ est une I-solution de $(\mathcal{H})$*

Preuve. On a $X'' + a\,X' + b\,X = c(t)$ et

$$\begin{aligned}(x - X)'' + a(x - X)' + b(x - X) &= x'' + ax' + bx - (X'' + aX' + bX)\\ &= x'' + ax' + bx - c(t)\\ &= 0\\ &\iff x \text{ est une } I\text{-solution de } (\mathcal{E})\end{aligned}$$

cqfd

Remarque. On obtient les I-solutions de $(\mathcal{E})$ en ajoutant à une I-solution (particulière) de $(\mathcal{E})$ une I-solution quelconque de $(\mathcal{H})$.

2.3.2 Principe de superposition des solutions

Proposition 2.6. *Soient c_1 et c_2 deux fonctions continues sur le même intervalle I.*

Si x_1 est une I-solution de $x'' + a\,x' + b\,x = c_1(t)$ et x_2 une I-solution de $x'' + a\,x' + b\,x = c_2(t)$, alors $(x_1 + x_2)$ est une I-solution de $x'' + a\,x' + b\,x = c_1(t) + c_2(t)$

Preuve.

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)'' + a(x_1 + x_2)' + b(x_1 + x_2) &= (x_1'' + a\,x_1' + b\,x_1) + (x_2'' + a\,x_2' + b\,x_2)\\ &= c_1(t) + c_2(t)\end{aligned}$$

cqfd

2.3.3 Passage du complexe au réel

Proposition 2.7. *Si X est une I-solution de $x'' + a\,x' + b\,x = c(t)$, alors $\overline{X}$ est une I-solution de $x'' + \overline{a}x' + \overline{b}x = \overline{c(t)}$.*

Si les scalaires a et b sont réels *et X une I-solution de $x'' + a\,x' + b\,x = c(t)$, alors $\Re\mathrm{e}(X)$ (resp. $\Im\mathrm{m}(X)$) est une I-solution de $x'' + a\,x' + b\,x = \Re\mathrm{e}\big(c(t)\big)$ (resp. $x'' + a\,x' + b\,x = \Im\mathrm{m}\big(c(t)\big)$).*

Preuve. On a $\overline{X}' = \overline{X'}$ et $\overline{X}'' = \overline{X''}$. De même $\Re\mathrm{e}(X') = \Re\mathrm{e}(X)'$, $\Re\mathrm{e}(X'') = \Re\mathrm{e}(X)''$, $\Im\mathrm{m}(X') = \Im\mathrm{m}(X)'$ et $\Im\mathrm{m}(X'') = \Im\mathrm{m}(X)''$. cqfd

2.3.4 Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(t)\exp(\mu t), P \in \mathbf{K}[X], \mu \in \mathbf{K}$.

Proposition 2.8. *Dans ce cas, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont définies sur $\mathbf{R}$.*

Si μ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$X(t) = Q(t)\exp(\mu t) \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P$$

Si μ est racine simple de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$X(t) = Q(t)\exp(\mu t) \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P + 1$$

ou mieux

$$X(t) = t\,Q_1(t)\exp(\mu t) \text{ avec } Q_1 \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q_1 = \deg P$$

Si μ est racine double de l'équation caractéristique, on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$X(t) = Q(t)\exp(\mu t) \text{ avec } Q \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q = \deg P + 2$$

ou mieux sous la forme

$$X(t) = t^2\,Q_2(t)\exp(\mu t) \text{ avec } Q_2 \in \mathbf{K}[X] \text{ et } \deg Q_2 = \deg P$$

ou mieux encore, on pose $x = z\exp(\mu t)$ et on recherche l'équation différentielle vérifiée par la fonction z (on trouve $z'' = P(t)$).

3 Le deuxième ordre à coefficients non constants

3.1 Un peu de vocabulaire

Définition 3.1 (Équation linéaire du deuxième ordre à coefficients non constants).

On appelle *équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients non constants*, une équation du type :

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où a, b et c sont des fonctions continues d'un même intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ désigne l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 3.2 (Équation homogène).

On appelle *équation homogène associée à* $(\mathcal{E})$, l'équation

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

Remarque. Dans ces définitions, le coefficient de x'' vaut 1 : on dit alors que l'équation est *normalisée* ou encore *résolue en x''*.

Si ce n'est pas le cas, on divise l'équation par le coefficient de x''. Par exemple, $t^2\,x'' + x = 1$ doit s'écrire $x'' + t^{-2}x = t^{-2}$ et l'intervalle I considéré est l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Tous les théorèmes de cette section sont relatifs à des équations *normalisées.*

Définition 3.3 (J-solution).

Si J est un sous-intervalle de I, une *J-solution* de $(\mathcal{E})$ est une fonction x de classe $\mathcal{C}^2$ sur J telle que :

$$\forall t \in J, \qquad x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$$

3.2 Le problème de Cauchy

Définition 3.4 (Conditions initiales).

Une *condition initiale* d'une équation différentielle du deuxième ordre est un triplet (t_0, x_0, x_0') de $I \times \mathbf{K}^2$, ce qui correspond à l'instant initial t_0, à la position initiale x_0 et à la vitesse initiale x_0'.

Définition 3.5 (Problème de Cauchy).

La fonction x est *solution du problème de Cauchy* de condition initiale (t_0, x_0, x_0') si x est une I-solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ avec

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad x'(t_0) = x_0'$$

Théorème 3.1 (Cauchy-Lipschitz).

Pour tout triplet $(t_0, x_0, x_0') \in I \times \mathbf{K}^2$, il existe une unique I-solution de $(\mathcal{E})$ (resp. $(\mathcal{H})$) au problème de Cauchy de condition initiale (t_0, x_0, x_0').

Théorème 3.2 (Structure des solutions de $(\mathcal{E})$ et de $(\mathcal{H})$).

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation avec second membre $(\mathcal{E})$, $x_1 - x_2$ est solution de l'équation homogène $(\mathcal{H})$, i.e.*() les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les sommes des solutions de $(\mathcal{H})$ et d'une solution de $(\mathcal{E})$.*

L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de $(\mathcal{H})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension deux.

Preuve. On a les identités pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t) = c(t) \\ x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t) = c(t) \end{aligned}$$

Par différence, on obtient, en utilisant la linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned} 0 &= \big(x_1''(t) - x_2''(t)\big) + a(t)\big(x_1'(t) - x_2'(t)\big) + b(t)\big(x_1(t) - x_2(t)\big) \\ &= (x_1 - x_2)''(t) + a(t)(x_1 - x_2)'(t) + b(t)(x_1 - x_2)(t) \end{aligned}$$

L'application qui, à une solution x de $(\mathcal{H})$, fait correspondre le couple $\big(x(t_0), x'(t_0)\big) \in \mathbf{K}^2$, est une application linéaire. Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que cette application linéaire est une bijection. Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ et $\mathbf{K}^2$ sont isomorphes et ont donc même dimension. cqfd

Remarque. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ de dimension 2 et de direction le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{H})$.

3.3 Résolution de $(\mathcal{E})$ quand on connaît une solution de $(\mathcal{H})$ qui ne s'annule pas sur I

Soit h une solution de $(\mathcal{H})$ *qui ne s'annule pas sur* I ; on effectue le changement de fonction inconnue :

$$y = \frac{x}{h(t)} \iff x = h(t)y$$

Ainsi, par dérivation,

$$\begin{aligned} x' &= h'(t)y + h(t)y' \\ x'' &= h''(t)y + 2h'(t)y' + h(t)y'' \end{aligned}$$

En substituant x dans $(\mathcal{E})$, on obtient

$$\begin{aligned} c(t) &= x'' + a(t)x' + b(t)x \\ &= \big(h''(t)y + 2h'(t)y' + h(t)y''\big) + a(t)\big(h'(t)y + h(t)y'\big) + b(t)h(t)y \\ &= h(t)y'' + \big(2h'(t) + a(t)h(t)\big)y' + \big(h''(t) + a(t)h'(t) + b(t)h(t)\big) \\ &= h(t)y'' + \big(2h'(t) + a(t)h(t)\big)y' + 0 \end{aligned}$$

et x est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, y est solution de $h(t)y'' + \big(2h'(t) + a(t)h(t)\big)y' = c(t)$, *i.e.* solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en la variable y', équation que l'on sait résoudre à l'aide de deux quadratures.

$$\boxed{x = h(t)\,y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \iff \begin{cases} y' = z \\ z' + \Big(2\dfrac{h'(t)}{h(t)} + a(t)\Big)z = \dfrac{c(t)}{h(t)} \end{cases}}$$

Remarque. Les deux intégrations successives donnent l'existence de deux constantes pour x, ce qui montre que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ dépend de deux constantes.

3.4 Wronskien de deux applications

Définition 3.6 (Wronskien de deux applications).
On appelle *wronskien* des applications h_1 et h_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{K}$, l'application $w(h_1, h_2)$ définie par

$$\forall t \in I,\ w(h_1, h_2)(t) = \det \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} = h_1(t)h_2'(t) - h_1'(t)h_2(t)$$

Remarques. Le wronskien $w(h_1, h_2)$ est une application continue sur I.
Deux applications proportionnelles ont un wronskien identiquement nul.

Proposition 3.3 (Wronskien de deux solutions de $(\mathcal{H})$).
Soient h_1 et h_2 deux solutions de $(\mathcal{H})$; ou bien le wronskien $w(h_1, h_2)$ est identiquement nul sur I et les fonctions h_1 et h_2 sont proportionnelles, ou bien le wronskien $w(h_1, h_2)$ ne s'annule pas sur I et (h_1, h_2) constituent une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.

Preuve. Puisque h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$, $w(h_1, h_2)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et, par dérivation

$$\begin{aligned} w(h_1, h_2)' = (h_1h_2' - h_1'h_2)' &= (h_1'h_2' + h_2h_2'') - (h_2''h_2 + h_1'h_2') \\ &= h_1h_2'' - h_1''h_2 = h_1\big(-a(t)h_2' - b(t)h_2\big) - \big(-a(t)h_1' - b(t)h_1\big)h_2 \\ &= -a(t)\big(h_1h_2' - h_1'h_2\big) \\ &= -a(t)w(h_1, h_2) \end{aligned}$$

Ainsi $w(h_1,h_2)(t) = w(h_1,h_2)(t_0)\exp\big(\int_{t_0}^t -a(u)\,\mathrm{d}u\big)$ et $w(h_1,h_2)$ est soit identiquement nul, soit ne s'annule pas sur I.

Si h_1 et h_2 ne sont pas proportionnelles, (h_1,h_2) constituent une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ (la dimension est 2). L'isomorphisme $h \mapsto \big(h(t_0), h'(t_0)\big)$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ sur $\mathbf{K}^2$ montre les couples $\big(h_1(t_0), h_1'(t_0)\big)$ et $\big(h_2(t_0), h_2'(t_0)\big)$ forment une base de $\mathbf{K}^2$, et $w(h_1,h_2)(t_0)$ est non nul. cqfd

Proposition 3.4 (Expression d'une fonction à l'aide d'une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$).
Soient (h_1,h_2) une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$; pour toute fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, il existe un unique couple (g_1,g_2) de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, tel que

$$\forall t \in I,\ f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \qquad \textit{et} \qquad f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\forall t \in I,\ f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \qquad \textit{et} \qquad 0 = h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t)$$

Preuve. Rappelons que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ est inversible si, et seulement si, $ad-bc \neq 0$, et, dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Il suffit de résoudre le système linéaire, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f(t) &= h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \\ f'(t) &= h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) \end{aligned}$$

que l'on écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

Puisque le wronskien $w(h_1,h_2)(t)$ ne s'annule pas sur I, il vient

$$\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(h_1,h_2)(t)}\begin{pmatrix} h_2'(t) & -h_2(t) \\ -h_1'(t) & h_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

On constate que les fonctions g_1 et g_2 sont uniques et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

En dérivant l'identité $\forall t \in I,\ f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t)$, on obtient :

$$f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) + h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t)$$

On a donc l'équivalence, pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) \iff 0 = h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t)$$

cqfd

3.5 Résolution de $(\mathcal{E})$ quand on connaît une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$; méthode de variation *des* constantes

Soient (h_1,h_2) une base de $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. La proposition précédente montre que l'on peut rechercher les solutions x de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$x = h_1(t)y_1 + h_2(t)y_2$$

avec les conditions équivalentes :

$$x' = h_1'(t)y_1 + h_2'(t)y_2 \iff 0 \equiv h_1(t)y_1' + h_2(t)y_2'$$

En dérivant et en substituant dans l'équation $(\mathcal{E})$, on obtient

$$\begin{aligned}
x'' &= h_1''(t)y_1 + h_2''(t)y_2 + h_1'(t)y_1' + h_2'(t)y_2' \\
c(t) &= x'' + a(t)x' + b(t)x \\
&= \big(h_1''(t)y_1 + h_2''(t)y_2 + h_1'(t)y_1' + h_2'(t)y_2'\big) + a(t)\big(h_1'(t)y_1 + h_2'(t)y_2\big) \\
&\qquad + b(t)\big(h_1(t)y_1 + h_2(t)y_2\big) \\
&= \big(h_1''(t) + a(t)h_1'(t) + b(t)h_1(t)\big)y_1 + \big(h_2''(t) + a(t)h_2'(t) + b(t)h_2(t)\big)y_2 \\
&\qquad + \big(h_1'(t)y_1' + h_2'(t)y_2'\big) \\
&= 0 + 0 + h_1'(t)y_1' + h_2'(t)y_2'
\end{aligned}$$

Les fonctions inconnues y_1 et y_2 sont solutions du système linéaire

$$\forall t \in I, \qquad \begin{aligned} 0 &= h_1(t)y_1' + h_2(t)y_2' \\ c(t) &= h_1'(t)y_1' + h_2'(t)y_2' \end{aligned}$$

ce qui donne, pour tout $t \in I$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(h_1,h_2)(t)} \begin{pmatrix} h_2'(t) & -h_2(t) \\ -h_1'(t) & h_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

d'où l'expression des fonctions y_1' et y_2' :

$$\forall t \in I,\ y_1'(t) = \frac{-c(t)h_2(t)}{h_1(t)h_2'(t) - h_1'(t)h_2(t)} \quad \text{et} \quad y_2'(t) = \frac{c(t)h_1(t)}{h_1(t)h_2'(t) - h_1'(t)h_2(t)}$$

Deux intégrations donnent y_1 et y_2, et donc x.

Remarque. Le problème de la résolution de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre est donc la détermination d'une solution, qui ne s'annule pas, de l'équation homogène associée, ou de la détermination de deux solutions non proportionnelles de cette même équation.

Il a été démontré qu'il n'existe pas de méthode générale permettant la détermination de telles solutions, d'où l'intérêt de pouvoir donner des résultats théoriques sur certain type d'équations, et de pouvoir effectuer des calculs numériques *rapides* et *soignés*.

Chapitre 2

Espace vectoriel normé

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$, et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou non.

1 Un peu de vocabulaire

1.1 Norme et distance

Définition 1.1 (Norme). On appelle *norme* sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, toute application $\mathcal{N} : E \mapsto [0, +\infty[$ vérifiant :

(i) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathcal{N}(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *axiome de séparation* ;
(ii) $\forall (\lambda, \mathbf{x}) \in \mathbf{K} \times E,\ \mathcal{N}(\lambda\mathbf{x}) = |\lambda|\mathcal{N}(\mathbf{x})$ *axiome d'homogénéité* ;
(iii) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2,\ \mathcal{N}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant \mathcal{N}(\mathbf{x}) + \mathcal{N}(\mathbf{y})$ *inégalité triangulaire.*

Proposition 1.1 (Inégalité de Minkowski). *Pour tout* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$*, on a :*

$$\big|\mathcal{N}(\mathbf{x}) - \mathcal{N}(\mathbf{y})\big| \leqslant \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Preuve. En écrivant $\mathbf{x} = (\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{y}$, on obtient à l'aide de l'inégalité triangulaire : $\mathcal{N}(\mathbf{x}) \leqslant \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathcal{N}(\mathbf{y})$, soit $\mathcal{N}(\mathbf{x}) - \mathcal{N}(\mathbf{y}) \leqslant \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. En échangeant les rôles de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, on obtient : $\mathcal{N}(\mathbf{y}) - \mathcal{N}(\mathbf{x}) \leqslant \mathcal{N}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, ce qui donne l'inégalité annoncée. cqfd

Définition 1.2 (Distance associée à une norme). Soit $\mathcal{N}$ une norme sur E ; on appelle *distance associée à* $\mathcal{N}$ l'application $\mathrm{d} : E \times E \mapsto [0, +\infty[$ définie par :

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

(i) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2,\ \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ *axiome de séparation* ;
(ii) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2,\ \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *axiome de symétrie* ;
(iii) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E^3,\ \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ *inégalité triangulaire* ;
(iv) $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^3,\ \mathrm{d}(\mathbf{x}+\mathbf{a}, \mathbf{y}+\mathbf{a}) = \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *invariance par translation* ;
(v) $\forall (\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{K} \times E^2,\ \mathrm{d}(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|\,\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *homogénéité.*

1.2 Boules

Définition 1.3 (Boules ouverte et fermée). Soit $\mathbf{a} \in E$ et $r \in]0, +\infty[$.

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in E \,/\, \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathrm{d}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$ est appelée *boule ouverte de centre* $\mathbf{a}$ *et de rayon* r.

L'ensemble $\mathcal{B}_f(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in E \,/\, \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = \mathrm{d}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leqslant r\}$ est appelée *boule fermée de centre* $\mathbf{a}$ *et de rayon* r.

Rappelons la définition d'un ensemble convexe :

Définition 1.4 (Ensemble convexe). Une partie A de E est dite *convexe* si, et seulement si, pour tous $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de A, le segment d'extrémités $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est contenu dans A, *i.e.* :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A,\ \forall t \in [0, 1],\ (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in A$$

Proposition 1.2 (Convexité des boules). *Les boules ouvertes et les boules fermées sont des ensembles convexes.*

Preuve. Soient $(\mathbf{a}, r) \in E \times]0, +\infty[$; pour $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} d\big(\mathbf{a}, (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big) &= \mathcal{N}\big((1-t)\mathbf{x} + t(\mathbf{y}-\mathbf{a})\big) = \mathcal{N}\big((1-t)(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + t(\mathbf{y}-\mathbf{a})\big) \\ &\leqslant \mathcal{N}\big((1-t)(\mathbf{x}-\mathbf{a})\big) + \mathcal{N}\big(t(\mathbf{y}-\mathbf{a})\big) \\ &= (1-t)\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + t\mathcal{N}(\mathbf{y}-\mathbf{a}) < (1-t)r + t\,r = r \end{aligned}$$

Ceci montre que $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ pour tout $t \in [0, 1]$, ou encore que le segment d'extrémités $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est contenu dans la boule ouverte $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$.

Le lecteur ou la lectrice est invité à montrer la convexité de la boule fermée. cqfd

2 Norme euclidienne

Dans cette section, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

2.1 Produit scalaire réel

Définition 2.1 (Produit scalaire). On appelle *produit scalaire réel* sur E, toute forme bilinéaire symétrique et définie positive, *i.e.* toute application $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ telle que

(i) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \varphi_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est linéaire *linéarité à droite* ;
(ii) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2,\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *symétrie* ;
(iii) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ *définie positive.*

Définition 2.2 (Espace préhilbertien réel, espace euclidien). E muni du produit scalaire φ est appelé un *espace préhilbertien réel.* Si E est un espace de dimension finie, (E, φ) est un *espace euclidien.*

Le produit scalaire scalaire $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de deux vecteurs est noté $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$, ou encore $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $<\mathbf{x}, \mathbf{y}>$, $(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$...

Remarques.
La linéarité à droite et la symétrie impliquent la linéarité à gauche.
Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.
Le caractère « défini positif » du produit scalaire peut s'établir en montrant que

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, tout produit scalaire sur E induit un produit scalaire sur F.

Exemples 2.1.

(i) Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$: il est défini par

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),\ \forall \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(ii) Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$: il est défini par

$$\forall (X, Y) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\big)^2, \quad \langle X \mid Y \rangle = {}^t XY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(iii) Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$: il est défini par

$$\forall (A, B) \in \big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})\big)^2, \quad \langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}({}^t AB) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$$

(iv) Produit scalaire sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles :

$$\forall (f, g) \in \big(\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})\big)^2, \quad \langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

(v) Produit scalaire sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur R, 2π-périodiques et à valeurs réelles :

$$\forall (f, g) \in \big(\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbf{R})\big)^2, \quad \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

(vi) Produit scalaire sur l'espace $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels :

$$\forall (P, Q) \in \big(\mathbf{R}[X]\big)^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \, \mathrm{d}t$$

2.2 Norme associée à un produit scalaire réel

E désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$.

Définitions 2.3 (Norme et distance associées). La norme associée au produit scalaire $\langle \mid \rangle$ est définie par

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in E, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}}$$

La distance associée au produit scalaire est définie par

$$\boxed{\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x} \mid \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}}$$

Dans ce cas réel, la norme et la distance associée sont qualifiées d'*euclidiennes.*

Proposition 2.1. *L'application* $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$ *est une application de* E *sur* $[0, +\infty[$ *qui vérifie :*

(i) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *axiome de séparation ;*
(ii) $\forall (\lambda, \mathbf{x}) \in \mathbf{R} \times E,\ \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{x}\|$ *axiome d'homogénéité.*

Preuve.
(i) $0 = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
(ii) $\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x} \mid \lambda \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$

cqfd

L'inégalité triangulaire sera démontrée à la fin de cette section.

2.3 Expression du produit scalaire en fonction de la norme

Proposition 2.2. *Voici trois relations pour* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *éléments de* E *:*

(i) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$ *;*
(ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$ *égalité du parallélogramme ;*
(iii) $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\big)$

Preuve.
(i) Utilisons la linéarité à droite et à gauche, et la symétrie du produit scalaire

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

(ii) En changeant $\mathbf{y}$ en $-\mathbf{y}$, on obtient

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

Il suffit d'additionner les deux formules pour obtenir le résultat annoncé.

cqfd

La deuxième égalité s'interprète par le

Corollaire (Égalité du parallélogramme). *La somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.*

Remarque. L'égalité du parallélogramme caractérise les normes euclidiennes, *i.e.* les normes qui sont associées à un produit scalaire (réel).

2.4 Inégalité de Schwarz

Théorème 2.3 (Inégalité de Schwarz). *Pour tout* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *de* E*, on a*

$$\boxed{|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *est liée.*

Preuve. Si $\|\mathbf{x}\| = 0$, $\mathbf{x}$ est le vecteur nul, l'inégalité, qui devient une égalité dans ce cas, est vérifiée, et la famille $(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y})$ est une famille liée.

Si $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, on pose pour $\lambda \in \mathbf{R}$

$$T(\lambda) = \|\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

$T(\lambda)$ est un trinôme du second degré, que l'on écrit sous forme canonique

$$0 \leqslant T(\lambda) = \|\mathbf{x}\|^2\Big(\lambda + \frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big)^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \tag{2.1}$$

En donnant la valeur particulière $\lambda_0 = -\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$, on obtient l'inégalité annoncée.

Dans le cas de l'égalité, on a

$$0 \leqslant T(\lambda) = \|\mathbf{x}\|^2\Big(\lambda + \frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big)^2 \tag{2.2}$$

Donnant à λ la valeur particulière $\lambda_0 = -\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$, on obtient $0 = T(\lambda_0) = \|\lambda_0\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$, soit $\lambda_0\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{0}$ et la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une famille liée.

Réciproquement, si la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une famille liée, par exemple $\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}$, alors

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle| = |\langle \mathbf{x} \mid \mu\mathbf{x}\rangle| = |\mu|\,\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle = |\mu|\,\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|\,\|\mu\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$$

cqfd

Exemples 2.2. Voici quelques exemples d'application de l'inégalité de Schwarz :

(i) cas de $\mathbf{R}^n$:

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle| = \Big|\sum_{k=1}^n x_k y_k\Big| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = \Big(\sum_{k=1}^n x_k^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{k=1}^n y_k^2\Big)^{\frac12} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

(ii) cas de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

$$|\langle X \mid Y\rangle| = |{}^tXY| \leqslant \big({}^tXX\big)^{\frac12}\big({}^tYY\big)^{\frac12} = \sqrt{{}^tXX}\,\sqrt{{}^tYY}$$

(iii) cas de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$:

$$|\langle A \mid B\rangle| = |\mathrm{tr}({}^tAB)| = \Big|\sum_{i,j} a_{i,j}b_{i,j}\Big| \leqslant \big(\mathrm{tr}({}^tAA)\big)^{\frac12}\big(\mathrm{tr}({}^tBB)\big)^{\frac12} = \Big(\sum_{i,j} a_{i,j}^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i,j} b_{i,j}^2\Big)^{\frac12}$$

(iv) cas de $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$:

$$|\langle f \mid g\rangle| = \Big|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \Big(\int_a^b \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_a^b \big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}$$

L'inégalité de Schwarz montre que, pour deux vecteurs non nuls $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E, le quotient $\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$ est un réel de $[-1, 1]$; il existe un unique θ compris entre 0 et π tel que $\cos\theta$ soit égal à ce quotient, ce qui donne la

Définition 2.4 (Écart angulaire entre deux vecteurs réels).
Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel, il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$

θ est appelé *l'angle (non orienté) entre* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$; cet angle est défini à π près.

2.5 Inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire

Proposition 2.4 (Inégalité de Minkowski). *Pour tout* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *de* E,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

PREUVE. Développons $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$ et utilisons l'inégalité de Schwarz :

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \big(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\big)^2$$

cqfd

Corollaire. *L'application* $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle}$ *est une norme sur* E.

3 Produit scalaire sur un espace vectoriel complexe

Dans cette section, E désigne un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

Remarque. Sur $\mathbf{R}$, l'égalité $x_1^2 + x_2^2 = 0$ est équivalente à $x_1 = 0$ *et* $x_2 = 0$. Sur $\mathbf{C}$, la situation est différente ; on a :

$$0 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) \iff z_1 + iz_2 = 0 \textbf{ ou } z_1 - iz_2 = 0$$

tandis que

$$0 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \iff z_1 = 0 \textit{ et } z_2 = 0$$

Définition 3.1 (Produit scalaire hermitien). On appelle *produit scalaire complexe* ou *produit scalaire hermitien* sur E, toute forme *sesquilinéaire à symétrie hermitienne* et *définie positive*, *i.e.* toute application $\varphi : E \times E \to \mathbf{C}$ telle que

(*i*) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \varphi_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est linéaire — *linéarité à droite* ;
(*ii*) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2,\ \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$ — *symétrie hermitienne* ;
(*iii*) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ — *définie positive.*

Définition 3.2 (Espace préhilbertien complexe, espace hermitien).
E muni du produit scalaire φ est appelé *espace préhilbertien complexe.* Si E est un espace de dimension finie, (E, φ) est un *espace hermitien.*

Le produit scalaire $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de deux vecteurs est noté $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle$, ou encore $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $<\mathbf{x}, \mathbf{y}>$, $(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$...

Remarques.
La linéarité à droite et la symétrie hermitienne impliquent la *semi-linéarité* à gauche, *i.e.* pour tous nombres complexes λ_1 et λ_2, pour tous vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{y}$ de E,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 \mid \mathbf{y}\rangle &= \overline{\langle \mathbf{y} \mid \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2\rangle} && \text{symétrie hermitienne}\\
&= \overline{\lambda_1\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x}_1\rangle + \lambda_2\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x}_2\rangle} && \text{linéarité à droite}\\
&= \overline{\lambda_1}\langle \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{y}\rangle + \overline{\lambda_2}\langle \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{y}\rangle && \text{symétrie hermitienne}
\end{aligned}$$

Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.
Le caractère « défini positif » du produit scalaire peut s'établir en montrant que

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle \geqslant 0 \text{ et } \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, tout produit scalaire sur E induit un produit scalaire sur F.

Exemples 3.1. Reprenons les mêmes exemples que dans le cas réel, arrangés à la sauce complexe par l'utilisation de la conjugaison de la première variable.

(*i*) Produit scalaire canonique sur $\mathbf{C}^n$: il est défini par

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),\ \forall \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

(*ii*) Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$: il est défini par

$$\forall (X, Y) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\big)^2, \quad \langle X \mid Y \rangle = {}^t\overline{X} Y = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

(*iii*) Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$: il est défini par

$$\forall (A, B) \in \big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})\big)^2, \quad \langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}({}^t\overline{A} B) = \sum_{i,j} \overline{a_{i,j}} b_{i,j}$$

(*iv*) Produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et à valeurs complexes :

$$\forall (f, g) \in \big(\mathcal{C}([a, b], \mathbf{C})\big)^2, \quad \langle f \mid g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t$$

(*v*) Produit scalaire sur l'espace des fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes :

$$\forall (f, g) \in \big(\mathcal{C}_{2\pi}\big)^2, \quad \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)\, \mathrm{d}t$$

(*vi*) Produit scalaire sur l'espace $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes :

$$\forall (P, Q) \in \big(\mathbf{C}[X]\big)^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{P(t)} Q(t)\, \mathrm{d}t$$

3.1 Norme et distance associées à un produit scalaire hermitien

E désigne un espace préhilbertien complexe dont le produit scalaire est noté $\langle\ \mid\ \rangle$.

Définitions 3.3 (Norme et distance associées). Les définitions sont identiques au cas réel. La norme associée au produit scalaire $\langle\ \mid\ \rangle$ est définie par

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in E, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}}$$

La distance associée au produit scalaire est définie par

$$\boxed{\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2, \quad \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{y} - \mathbf{x} \mid \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle}}$$

Dans ce cas complexe, on donne le qualificatif d'*hermitienne* à la norme et à la distance associées au produit scalaire.

Proposition 3.1. $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$ *est une application de* E *sur* $[0, +\infty[$ *qui vérifie*

(*i*) $\forall \mathbf{x} \in E,\ \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *séparation ;*

(*ii*) $\forall (\lambda, \mathbf{x}) \in \mathbf{C} \times E,\ \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda|\, \|\mathbf{x}\|$ *homogénéité.*

Preuve.

(*i*) $0 = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(*ii*) $\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x} \mid \lambda \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$

cqfd

L'inégalité triangulaire sera démontrée à la fin de cette section.

3.2 Expression du produit scalaire en fonction de la norme

Proposition 3.2. *Voici des relations pour* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *éléments de* E *:*

(*i*) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$;

(*ii*) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$ *égalité du parallélogramme ;*

(*iii*) $\Re\mathrm{e}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\big)$

$\Im\mathrm{m}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2\big)$

et $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\big) + \frac{i}{4}\big(\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2\big)$

Preuve.

(*i*) Utilisons la linéarité à droite, la semi-linéarité à gauche et la symétrie hermitienne du produit scalaire

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{y}\rangle\\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \overline{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle} + \|\mathbf{y}\|^2\\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

(*ii*) En changeant $\mathbf{y}$ en $-\mathbf{y}$, on obtient

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\,\Re\mathrm{e}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2$$

Il suffit d'additionner les deux formules pour obtenir le résultat annoncé.

(*iii*) Changeons $\mathbf{y}$ en $-i\mathbf{y}$; on obtient, en utilisant $\Re\mathrm{e}(-iz) = \Im\mathrm{m}\, z$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}(-i\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle) + \|\mathbf{y}\|^2\\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\Im\mathrm{m}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

cqfd

La deuxième égalité s'interprète toujours par le

Corollaire (Égalité du parallélogramme). *La somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale au double de la somme des carrés des longueurs des diagonales.*

Remarque. L'égalité du parallélogramme caractérise les normes hermitiennes, *i.e.* les normes associées à un produit scalaire complexe (ou hermitien).

3.3 Inégalité de Schwarz

Théorème 3.3 (Inégalité de Schwarz). *Pour tout* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *de* E*, on a*

$$\boxed{|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *est liée.*

Preuve. Si $\|\mathbf{x}\| = 0\ldots$ voir le cas réel.

Si $\|\mathbf{x}\| \neq 0$, on pose pour $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned}0 \leqslant T(\lambda) &= \|\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \lambda\mathbf{x}+\mathbf{y} \mid \lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle\\ &= \lambda\overline{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2 + \overline{\lambda}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \lambda\overline{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle} + \|\mathbf{y}\|^2\\ &= \|\mathbf{x}\|^2\Big(\overline{\lambda} + \frac{\overline{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big)\Big(\lambda + \frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big) + \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle\overline{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}}{\|\mathbf{x}\|^2}\\ &= \|\mathbf{x}\|^2\Big|\lambda + \frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big|^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - |\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}\end{aligned}$$

$T(\lambda)$ est un trinôme du second degré en la variable *complexe* λ, que l'on a écrit sous sa forme canonique. En donnant la valeur particulière $\lambda_0 = -\frac{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}$, on obtient l'inégalité annoncée.

Le reste de la démonstration se traite comme dans le cas réel. cqfd

Exemples 3.2. Toujours les mêmes exemples d'application de l'inégalité de Schwarz ; il suffit d'ajouter une pincée de condiment « conjugaison » sur la première variable et le plat est prêt.

(i) cas de $\mathbf{C}^n$:

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k\Big| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = \Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\Big)^{\frac12}\big(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\big)^{\frac12} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2}$$

(ii) cas de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$:

$$|\langle X \mid Y\rangle| = |{}^t\overline{X}Y| \leqslant \big({}^t\overline{X}X\big)^{\frac12}\big({}^t\overline{Y}Y\big)^{\frac12} = \sqrt{{}^t\overline{X}X}\sqrt{{}^t\overline{Y}Y}$$

(iii) cas de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$:

$$|\langle A \mid B\rangle| = |\mathrm{tr}({}^t\overline{A}B)| = \Big|\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}\Big| \leqslant \big(\mathrm{tr}({}^t\overline{A}A)\big)^{\frac12}\big(\mathrm{tr}({}^t\overline{B}B)\big)^{\frac12} = \Big(\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i,j}|b_{i,j}|^2\Big)^{\frac12}$$

(iv) cas de $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{C})$:

$$|\langle f \mid g\rangle| = \Big|\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \Big(\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}$$

L'inégalité de Schwarz montre que, pour deux vecteurs non nuls $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de E, le quotient $\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$ est un nombre *complexe* de module inférieur ou égal à 1 ; on ne peut plus parler d'écart angulaire entre deux vecteurs d'un espace vectoriel complexe.

3.4 Inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire

Proposition 3.4. *Pour tout* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *de* E,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

PREUVE. Démonstration identique au cas réel :

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\Re\mathrm{e}\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \big(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\big)^2$$

cqfd

Corollaire. $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}\rangle}$ *est une norme sur* E.

4 Les normes fondamentales sur $\mathbf{K}^n$

4.1 La norme $\mathcal{N}_1$

Définition 4.1. Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose :

$$\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

Proposition 4.1. *L'application* $\mathcal{N}_1$ *est une norme sur* $\mathbf{K}^n$.

PREUVE.
Séparation : $\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) = 0 \iff \sum_j|x_j| = 0 \iff \forall j \in [\![1,n]\!],\ |x_j| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
Homogénéité : $\mathcal{N}_1(\lambda\mathbf{x}) = \sum_j|\lambda x_j| = |\lambda|\sum_j|x_j| = |\lambda|\mathcal{N}_1(\mathbf{x})$
Inégalité triangulaire : $\mathcal{N}_1(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n|x_j+y_j| \leqslant \sum_{j=1}^n\big(|x_j|+|y_j|\big) = \sum_{j=1}^n|x_j| + \sum_{j=1}^n|y_j| = \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_1(\mathbf{y})$

cqfd

4.2 La norme euclidienne ou norme $\mathcal{N}_2$

Définition 4.2 (Norme euclidienne). Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose :

$$\mathcal{N}_2(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\Big)^{1/2}$$

Remarque. La norme euclidienne $\mathcal{N}_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbf{K}^n$:

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j & \text{dans le cas réel,} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j & \text{dans le cas complexe.} \end{cases}$$

4.3 La norme $\mathcal{N}_\infty$

Définition 4.3. Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose :

$$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = \sup\big\{|x_j| \;/\; j \in [\![1,n]\!]\big\} = \max\{|x_j| \;/\; j \in [\![1,n]\!]\}$$

Proposition 4.2. *L'application $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur $\mathbf{K}^n$.*

PREUVE.
Séparation : $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = 0 \iff \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j| = 0 \iff \forall j \in [\![1,n]\!],\ |x_j| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
Homogénéité : $\mathcal{N}_\infty(\lambda\mathbf{x}) = \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |\lambda x_j| = |\lambda| \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j| = |\lambda| \mathcal{N}_\infty(\mathbf{x})$
Inégalité triangulaire : des inégalités $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \sup_j |x_j| + \sup_j |y_j|$ vraies pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on tire que $\sup_j |x_j| + \sup_j |y_j|$ est un majorant de $\big\{|x_k + y_k| \;/\; k \in [\![1,n]\!]\big\}$; ainsi :

$$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j + y_j| \leqslant \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j| + \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |y_j| = \mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) + \mathcal{N}_\infty(\mathbf{y})$$

cqfd

5 Les normes fondamentales sur $\mathcal{C}([a,b])$

5.1 La norme de la convergence en moyenne

Définition 5.1. Pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose :

$$\mathcal{N}_1(f) = \int_a^b |f| = \int_a^b \big|f(t)\big| \,\mathrm{d}t$$

Proposition 5.1. *L'application $\mathcal{N}_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$; elle est appelée la* norme de la convergence en moyenne *sur $[a,b]$.*

PREUVE. Puisque $|f|$ est une application positive et continue sur le segment $[a,b]$, son intégrale existe et est positive, ce qui montre que $\mathcal{N}_1$ est une application de $\mathcal{C}([a,b])$ à valeurs dans $[0,+\infty[$.
Séparation : $\mathcal{N}_1(f) = \int_a^b |f| = 0 \iff \forall t \in [a,b], \big|f(t)\big| = 0 \iff f = 0$, car $|f|$ est une fonction **positive**, **continue**, d'intégrale **nulle** sur le segment $[a,b]$.
Homogénéité : $\mathcal{N}_1(\lambda f) = \int_a^b |\lambda f| = |\lambda| \int_a^b |f| = \lambda \mathcal{N}_1(f)$
Inégalité triangulaire : $\mathcal{N}_1(f+g) = \int_a^b |f+g| \leqslant \int_a^b \big(|f|+|g|\big) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g)$ cqfd

5.2 La norme de la convergence en moyenne quadratique

Définition 5.2. Pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose :

$$\mathcal{N}_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f|^2} = \sqrt{\int_a^b \left|f(t)\right| \mathrm{d}t}$$

Proposition 5.2. *L'application $\mathcal{N}_2$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$; elle est appelée* la norme de la convergence en moyenne quadratique *sur $[a,b]$. $\mathcal{N}_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a,b])$:*

$$\langle f \mid g \rangle = \begin{cases} \int_a^b f\, g & \text{dans le cas réel} \\ \int_a^b \overline{f}\, g & \text{dans le cas complexe} \end{cases}$$

5.3 La norme de la convergence uniforme

Définition 5.3. Pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose :

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\left\{\left|f(t)\right| \ / \ t \in [a,b]\right\} = \max\left\{\left|f(t)\right| \ / \ t \in [a,b]\right\}$$

Proposition 5.3. *L'application $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$; elle est appelée* la norme de la convergence uniforme *sur $[a,b]$.*

Preuve. L'application $|f|$ est une application continue sur le segment $[a,b]$; elle est donc bornée et atteint ses bornes, ce qui montre que $\mathcal{N}_\infty$ est une application de $\mathcal{C}([a,b])$ à valeurs dans $[0,+\infty[$.
Séparation : $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\left\{\left|f(t)\right| \ / \ t \in [a,b]\right\} = 0 \iff \forall t \in [a,b], \left|f(t)\right| = 0 \iff f = 0$
Homogénéité : $\mathcal{N}_\infty(\lambda f) = \sup_{t\in[a,b]} \left|\lambda f(t)\right| = |\lambda| \sup_{t\in[a,b]} \left|f(t)\right| = |\lambda| \mathcal{N}_\infty(f)$
Inégalité triangulaire : de l'inégalité $\forall t \in [a,b],\ \left|f(t)+g(t)\right| \leqslant \left|f(t)\right| + \left|g(t)\right| \leqslant \sup\left\{\left|f(t)\right| \ / \ t \in [a,b]\right\} + \sup\left\{\left|g(t)\right| / t \in [a,b]\right\}$, on tire : $\|f+g\|_\infty = \sup\left\{\left|f(t)+g(t)\right| / t \in [a,b]\right\} \leqslant \sup\left\{\left|f(t)\right| / t \in [a,b]\right\} + \sup\left\{\left|g(t)\right| \ / \ t \in [a,b]\right\} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ cqfd

6 Les normes fondamentales sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Définition 6.1. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on pose :

$$\mathcal{N}_1(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$$

$$\mathcal{N}_2(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2}$$

$$\mathcal{N}_\infty(A) = \sup\{|a_{ij}| \ / \ i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]\}$$

$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le lecteur est invité à démontrer ces affirmations. De plus $\mathcal{N}_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire

$$\langle A \mid B \rangle = \begin{cases} \operatorname{tr}({}^t\!A\, B) & \text{dans le cas réel} \\ \operatorname{tr}({}^t\overline{A}\, B) & \text{dans le cas complexe} \end{cases}$$

7 Les suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette section, E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé muni de sa norme $\|\ \|$.

7.1 Suites convergentes

Définition 7.1 (Suite convergente, suite divergente).
On dit que la suite $(\mathbf{u}_n)_n \in E^{\mathbf{N}}$ à valeurs dans E *converge* si, et seulement si, il existe un vecteur $\mathbf{a} \in E$ tel que la suite réelle $\big(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\|\big)_n$ converge vers 0, *i.e.* :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \implies \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| \leqslant \varepsilon$$

On dit alors que la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ *converge* vers $\mathbf{a}$, ou que $\mathbf{a}$ est la *limite* de la suite $(\mathbf{u}_n)_n$.
Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Remarque. On a donc, comme **toujours** :

$$\mathbf{u}_n \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{a} \iff \mathbf{u}_n - \mathbf{a} \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{0} \iff \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Théorème 7.1 (Unicité de la limite). *La limite d'une suite convergente $(\mathbf{u}_n)_n$ est unique ; elle est notée $\lim\limits_{n\uparrow+\infty} \mathbf{u}_n$ ou $\lim\limits_n \mathbf{u}_n$ ou $\lim\,(\mathbf{u}_n)_n$.*

Preuve. Soient $\mathbf{a}_1$et $\mathbf{a}_2$ deux limites de la suite convergente $(\mathbf{u}_n)_n$; alors :

$$0 \leqslant \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_n - \mathbf{a}_2\| \leqslant \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{u}_n\| + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}_2\|$$

et puisque les suites $\big(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}_1\|\big)_n$ et $\big(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}_2\|\big)_n$ convergent vers 0, la suite constante $\big(\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|\big)_n$ tend vers 0 par encadrement ; ainsi $\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\| = 0$ et donc $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. cqfd

7.2 Règles de calcul

7.2.1 Limite d'une combinaison linéaire

Proposition 7.2 (K-espace vectoriel des suites convergentes).
L'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et l'application qui à toute suite convergente $(\mathbf{u}_n)_n$ associe sa limite $\lim_n \mathbf{u}_n$ est une application linéaire.
En d'autres termes, si $(\mathbf{u}_n)_n$ converge vers $\mathbf{a}$ et $(\mathbf{v}_n)_n$ vers $\mathbf{b}$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ la suite $(\lambda\mathbf{u}_n + \mu\mathbf{v}_n)_n$ converge vers $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

Preuve. De $0 \leqslant \|(\lambda\mathbf{u}_n + \mu\mathbf{v}_n) - (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})\| = \|\lambda(\mathbf{u}_n - \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{v}_n - \mathbf{b})\| \leqslant |\lambda|\,\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| + |\mu|\,\|\mathbf{v}_n - \mathbf{b}\|$, on tire, par encadrement, que $\|(\lambda\mathbf{u}_n + \mu\mathbf{v}_n) - (\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})\|$ tend vers 0.
Puisque la suite nulle converge vers $\mathbf{0}$, les suites convergentes constituent un sous-espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ des suites quelconques sur E. cqfd

7.2.2 Suite bornée

Définition 7.2 (Suite bornée).
La suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est *bornée* si, et seulement si, il existe un nombre positif M, indépendant de n tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $\|\mathbf{u}_n\| \leqslant M$.

Proposition 7.3 (Suite bornée et suite de limite nulle).
Soient $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de E et $(\lambda_n)_n$ une suite de $\mathbf{K}$.

(*i*) *Si $(\mathbf{u}_n)_n$ est bornée et $\lim_n \lambda_n = 0$, alors $\lim_n \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.*
(*ii*) *Si $(\mathbf{u}_n)_n$ tend vers $\mathbf{0}$ et $(\lambda_n)_n$ est bornée, alors $\lim_n \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.*

Preuve.
(*i*) Puisque la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est bornée, il existe un nombre positif M, indépendant de n, tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $\|\mathbf{u}_n\| \leqslant M$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \|\lambda_n\mathbf{u}_n\| = |\lambda_n|\,\|\mathbf{u}_n\| \leqslant |\lambda_n| M$$

et par encadrement $\lim_n \|\lambda_n\mathbf{u}_n\| = 0$.

(*ii*) La suite $(\lambda_n)_n$ est bornée si, et seulement si, il existe un nombre positif Λ, indépendant de n tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $|\lambda_n| \leqslant \Lambda$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \|\lambda_n \mathbf{u}_n\| = |\lambda_n|\,\|\mathbf{u}_n\| \leqslant \Lambda \|\mathbf{u}_n\|$$

et par encadrement $\lim_n \|\lambda_n \mathbf{u}_n\| = 0$.

cqfd

7.2.3 Norme de la limite d'une suite convergente

Proposition 7.4. *Si $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite convergente à valeurs dans E, la suite $\big(\|\mathbf{u}_n\|\big)_n$ converge et*

$$\lim_n \|\mathbf{u}_n\| = \|\lim_n \mathbf{u}_n\|$$

La réciproque est fausse sauf si $\lim_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$

Preuve. Notons $\mathbf{a}$ la limite de $(\mathbf{u}_n)_n$; d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \big|\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{u}_n\|\big| \leqslant \|\mathbf{a} - \mathbf{u}_n\|$$

et par encadrement $\big|\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{u}_n\|\big| \underset{n}{\longrightarrow} 0$

La suite $((-1)^n)_n$ est un contre-exemple dans $\mathbf{R}$. cqfd

8 Applications lipschitziennes

Dans cette section, $(E, \mathcal{N})$ et $(F, \|\cdot\|)$ sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés.

8.1 Un peu de vocabulaire

Définition 8.1. Soit A une partie de E et $\mathbf{f}$ une application de A à valeurs dans F ; $\mathbf{f}$ est dite *lipschitzienne* si, et seulement si, il existe une constante $k \in [0, +\infty[$ telle que :

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2,\ \big\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\big\| \leqslant k\,\mathcal{N}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

k est appelé *rapport de Lipschitz* de f, et f est dite *k-lipschitzienne.*

L'ensemble K des rapports de Lipschitz d'une fonction lipschitzienne $\mathbf{f}$ est un intervalle fermé non borné, *i.e.* un intervalle du type $[\alpha, +\infty]$; ainsi il existe un plus petit rapport α.

En effet, si k est un rapport, tout $k' \geqslant k$ est encore un rapport ce qui montre que K est un intervalle non borné.

D'autre part, si $(k_n)_n$ est une suite convergente vers κ de rapports, alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2,\ \big\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\big\| \leqslant k_n \mathcal{N}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

et par passage à la limite sur n

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2,\ \big\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\big\| \leqslant \kappa \mathcal{N}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ce qui montre que κ est encore un rapport de Lipschitz pour $\mathbf{f}$ et donc que K est fermé.

8.2 Exemples

8.2.1 Les fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment.

Proposition 8.1. *Toute fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ est lipschitzienne de rapport $\|f'\|_\infty$.*

Preuve. Puisque pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t)|$ est inférieur à $\|f'\|_\infty$, l'inégalité des accroissements finis montre que :

$$\forall (u, v) \in [a, b]^2,\ |f(u) - f(v)| \leqslant \|f'\|_\infty |u - v|$$

cqfd

8.2.2 La norme

Proposition 8.2. *Si $\mathcal{N}$ est une norme sur E, $\mathcal{N}$ est une application lipschitzienne sur E de rapport* 1.

Preuve. On considère l'application $\mathcal{N}$ de E muni de la norme $\mathcal{N}$ vers $\mathbf{R}$ muni de la valeur absolue $|\ |$; l'inégalité de Minkowski donne

$$\big|\mathcal{N}(\mathbf{x}) - \mathcal{N}(\mathbf{y})\big| \leqslant \mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

cqfd

8.2.3 L'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit la forme linéaire $I : f \in \mathcal{C}([a,b]) \mapsto \int_a^b f \in \mathbf{K}$.

L'inégalité $|I(f)| = |\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f| = \mathcal{N}_1(f)$ montre que

$$|I(f) - I(g)| = |I(f-g)| \leqslant \mathcal{N}_1(f-g)$$

et I est une application 1-lipschitzienne sur $\mathcal{C}([a,b])$ muni de la norme $\mathcal{N}_1$.

L'inégalité $|I(f)| = |\int_a^b f| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant \int_a^b \sup|f| = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty(f)$ montre que

$$|I(f) - I(g)| = |I(f-g)| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f-g)$$

et I est une application $(b-a)$-lipschitzienne sur $\mathcal{C}([a,b])$ muni de la norme $\mathcal{N}_\infty$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I(f)| = \Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f|^2}\sqrt{\int_a^b 1^2} = \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_2(f)$$

montre que

$$|I(f) - I(g)| = |I(f-g)| \leqslant \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_2(f-g)$$

et I est une application $\sqrt{b-a}$-lipschitzienne sur $\mathcal{C}([a,b])$ muni de la norme $\mathcal{N}_2$.

8.3 Opérations algébriques

Proposition 8.3. *Toute combinaison linéaire d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.*

Preuve. Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ deux applications lipschitziennes sur $A \subset (E, \mathcal{N})$ à valeurs dans $(F, \|\ \|)$ de rapports respectifs $k_\mathbf{f}$ et $k_\mathbf{g}$, et λ et μ deux scalaires de $\mathbf{K}$; on a, pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in A^2$:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})(\mathbf{x}) - (\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})(\mathbf{y})\| &= \big\|\lambda\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\big) + \mu\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\big)\big\| \\
&\leqslant |\lambda|\,\big\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\big\| + |\mu|\,\big\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y})\big\| \\
&\leqslant |\lambda| k_\mathbf{f}\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + |\mu| k_\mathbf{g}\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

et $\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda|k_\mathbf{f} + |\mu|k_\mathbf{g}$. cqfd

Proposition 8.4. *Toute composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.*

Preuve. Soient $(E,\mathcal{N})$, $(F,\mathcal{N}')$ et $(G,\mathcal{N}'')$ trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, $\mathbf{f} : A \subset E \mapsto F$ et $\mathbf{g} : B \subset F \mapsto G$ deux applications lipschitziennes de rapports respectifs $k_\mathbf{f}$ et $k_\mathbf{g}$ telles que $\mathbf{f}(A) \subset B$; alors, pour tout $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in A^2$, on a :

$$\mathcal{N}''\big(\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) - \mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{y})\big)\big) \leqslant k_\mathbf{g}\mathcal{N}'\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})\big) \leqslant k_\mathbf{g}k_\mathbf{f}\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

et $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ est lipschitzienne de rapport $k_\mathbf{g}k_\mathbf{f}$. cqfd

9 Comparaison des normes

Dans cette section, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ désignent deux normes sur le *même* **K**-espace vectoriel E.

9.1 Comparaison de normes

Définition 9.1 (Finesse). Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux normes sur le même **K**-espace vectoriel E ; on dit que $\mathcal{N}$ est *plus fine* que $\mathcal{N}'$, ou encore $\mathcal{N}'$ est *moins fine* que $\mathcal{N}$, si, et seulement si, toute suite de E qui converge vers $\mathbf{0}$ pour $\mathcal{N}$ converge, aussi, vers $\mathbf{0}$ pour $\mathcal{N}'$.

Théorème 9.1 (Caractérisation).

$$\mathcal{N} \textit{ est plus fine que } \mathcal{N}' \iff \exists\alpha > 0,\ \mathcal{N}' \leqslant \alpha\mathcal{N}$$

PREUVE.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par hypothèse, $\mathcal{N}' \leqslant \alpha\mathcal{N}$, *i.e.* $\forall \mathbf{x} \in E, \mathcal{N}'(\mathbf{x}) \leqslant \alpha\mathcal{N}(\mathbf{x})$, et donc

$$\lim_n \mathcal{N}(\mathbf{u}_n) = 0 \implies \lim_n \mathcal{N}'(\mathbf{u}_n) = 0$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Montrons la contraposée à savoir :

$$\Big(\forall\alpha > 0, \exists \mathbf{x} \in E, \mathcal{N}'(\mathbf{x}) > \alpha\mathcal{N}(\mathbf{x})\Big) \implies \Big(\exists(\mathbf{v}_n)_n \in E^{\mathbf{N}} \text{ telle que } \mathcal{N}(\mathbf{v}_n) \underset{n}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \mathcal{N}'(\mathbf{v}_n) \underset{n}{\not\longrightarrow} 0\Big)$$

Ainsi, : $\forall n \in \mathbf{N}, \exists \mathbf{u}_n \in E, \mathcal{N}'(\mathbf{u}_n) > n\mathcal{N}(\mathbf{u}_n)$; en particulier $\mathbf{u}_n \neq \mathbf{0}$ et en posant : $\mathbf{v}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\mathcal{N}(\mathbf{u}_n)}\mathbf{u}_n$, on obtient :

$$\mathcal{N}(\mathbf{v}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \mathcal{N}'(\mathbf{v}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\mathcal{N}'(\mathbf{v}_n)}{\mathcal{N}(\mathbf{v}_n)} > \sqrt{n} \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$$

cqfd

Remarque. La condition $(\exists\alpha > 0,\quad \mathcal{N}' \leqslant \alpha\mathcal{N})$ équivaut à ce que toute suite de E convergente pour $\mathcal{N}$ est convergente pour $\mathcal{N}'$, car la convergence de $(\mathbf{u}_n)_n$ vers $\mathbf{a}$ équivaut à la convergence de la suite $(\mathbf{u}_n - \mathbf{a})_n$ vers $\mathbf{0}$.

Proposition 9.2 (Finesse et application lipschitzienne).
$\mathcal{N}$ est plus fine que $\mathcal{N}'$ si, et seulement si, l'application identique de E $I_E : (E,\mathcal{N}) \mapsto (E,\mathcal{N}')$ est lipschitzienne.

PREUVE. $\mathcal{N}$ est plus fine que $\mathcal{N}'$ si, et seulement si, $\exists\alpha > 0, \mathcal{N}' \leqslant \alpha\mathcal{N}$, si, et seulement si, $\exists\alpha > 0, \forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E^2, \mathcal{N}'(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \leqslant \alpha\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

Ainsi, $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E^2, |\mathcal{N}'(\mathbf{x}) - \mathcal{N}'(\mathbf{y})| \leqslant \mathcal{N}'(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \leqslant \alpha\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, *i.e.* l'application identique $I_E : (E,\mathcal{N}) \mapsto (E,\mathcal{N}')$ est α-lipschitzienne.

Réciproquement, si I_E est α-lipschitzienne, on a $\forall \mathbf{x} \in E, |\mathcal{N}'(\mathbf{x}) - \mathcal{N}'(\mathbf{0})| \leqslant \alpha|\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{0})|$, *i.e.* $\mathcal{N}' \leqslant \alpha\mathcal{N}$. cqfd

9.2 Normes équivalentes

Définition 9.2. Deux normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sur le même **K**-espace vectoriel E sont dites *équivalentes* si, et seulement si, toute suite de E convergeant pour l'une est convergente pour l'autre.

Théorème 9.3 (Caractérisation). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *$\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont équivalentes ;*

(*ii*) $\forall(\mathbf{u}_n)_n \in E^{\mathbf{N}}$, $(\mathbf{u}_n)_n$ *converge vers* $\mathbf{a}$ *pour* $\mathcal{N}$ *si, et seulement si,* $(\mathbf{u}_n)_n$ *converge vers* $\mathbf{a}$ *pour* $\mathcal{N}'$ *;*
(*iii*) $\exists(\alpha,\beta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[, \quad \alpha\mathcal{N} \leqslant \mathcal{N}' \leqslant \beta\mathcal{N}$ *;*
(*iv*) *Les applications identiques* $I_E : (E,\mathcal{N}) \mapsto (E,\mathcal{N}')$ *et* $I_E : (E,\mathcal{N}') \mapsto (E,\mathcal{N})$ *sont lipschitziennes.*

Preuve. (*i*) $\iff$ (*ii*) : c'est la définition.
(ii) $\iff$ (iii) car (ii) est équivalent à $\mathcal{N}'$ plus fine que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ plus fine que $\mathcal{N}'$.
(iii) $\iff$ (iv) : voir la caractérisation de la finesse par le caractère lipschitzien de l'identité. cqfd

Remarques.
Deux normes équivalentes définissent la même notion de convergence sur E.
L'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

9.3 Exemples

Théorème 9.4. *Les normes* $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ *et* $\mathcal{N}_\infty$ *sont équivalentes sur* $\mathbf{K}^n$, *et on a les égalités :*

$$\mathcal{N}_\infty \leqslant \mathcal{N}_1 \leqslant \sqrt{n}\mathcal{N}_2 \leqslant n\mathcal{N}_\infty$$
$$\mathcal{N}_\infty \leqslant \mathcal{N}_2 \leqslant \mathcal{N}_1 \leqslant n\mathcal{N}_\infty$$

Preuve. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$;

$$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = \sup_j |x_j| = |x_{j_0}| \leqslant \sum_j |x_j| = \mathcal{N}_1(\mathbf{x}) \text{ donc } \mathcal{N}_\infty \leqslant \mathcal{N}_1$$

$$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = \sup_j |x_j| = |x_{j_0}| = \sqrt{|x_{j_0}|^2} \leqslant \sqrt{\sum_j |x_j|^2} = \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) \text{ donc } \mathcal{N}_\infty \leqslant \mathcal{N}_2$$

$$\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) = \sum_j |x_j| \leqslant \sqrt{\sum_j |x_j|^2}\sqrt{\sum_j 1^2} = \sqrt{n}\mathcal{N}_2(\mathbf{x}) \text{ donc } \mathcal{N}_1 \leqslant \sqrt{n}\mathcal{N}_2$$

$$\mathcal{N}_2^2(\mathbf{x}) = \sum_j |x_j|^2 \leqslant \sum_j \sup_j |x_j|^2 = n\mathcal{N}_\infty^2(\mathbf{x}) \text{ donc } \mathcal{N}_2 \leqslant \sqrt{n}\mathcal{N}_\infty$$

$$\mathcal{N}_2^2(\mathbf{x}) = \sum_j |x_j|^2 \leqslant \Big(\sum_j |x_j|\Big)^2 = \mathcal{N}_1^2(\mathbf{x}) \text{ donc } \mathcal{N}_2 \leqslant \mathcal{N}_1$$

Les constantes trouvées sont les meilleures possibles. Le démontrer ! cqfd

Proposition 9.5. *Les normes* $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ *et* $\mathcal{N}_\infty$ *ne sont pas équivalentes sur* $\mathcal{C}([a,b])$, *mais on a les égalités :*

$$\mathcal{N}_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_2 \leqslant (b-a)\,\mathcal{N}_\infty$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$;

$$\mathcal{N}_1(f) = \int_a^b |f| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f|^2}\sqrt{\int_a^b 1^2} = \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_2(f), \text{ donc : } \mathcal{N}_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_2$$

$$\mathcal{N}_2^2(f) = \int_a^b |f|^2 \leqslant \int_a^b \sup |f|^2 = (b-a)\,\mathcal{N}_\infty^2(f), \text{ donc : } \mathcal{N}_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\mathcal{N}_\infty$$

On considère la suite de fonctions $f_n : x \in [a,b] \mapsto (\frac{x-a}{b-a})^n$; alors :

$$\mathcal{N}_1(f_n) = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{b-a}{n+1}$$
$$\mathcal{N}_2(f_n) = \sqrt{\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{2n} \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{b-a}{2n+1}}$$
$$\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1$$

Ainsi la suite $\left(n^{\frac{3}{4}} f_n\right)_n$ converge en moyenne vers 0 et $\mathcal{N}_2(n^{\frac{3}{4}} f_n) = n^{3/4}\sqrt{\frac{b-a}{2n+1}}$ tend vers l'infini ; d'autre part, la suite $(f_n)_n$ converge en moyenne et en moyenne quadratique vers 0, mais elle ne converge pas uniformément vers 0 sur l'intervalle $[a, b]$. cqfd

9.4 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème 9.6. *Toutes les normes sur un* **K**-*espace vectoriel de dimension finie E sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{e}_j$ la décomposition de $\mathbf{x}$ sur $\mathcal{B}$. On pose :

$$\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = \sup\{|x_j| \;/\; j \in [\![1, p]\!]\}$$

$\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur E, ce qui montre qu'il en existe.

Soit $\mathcal{N}$ une norme quelconque sur E ; alors pour $\mathbf{x} \in E$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}\Big(\sum_j x_j \mathbf{e}_j\Big) &\leqslant \sum_j |x_j| \mathcal{N}(\mathbf{e}_j) \\ &\leqslant \sum_j \big(\sup_j |x_j|\big)\mathcal{N}(\mathbf{e}_j) = \mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) \sum_j \mathcal{N}(\mathbf{e}_j)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{N} \leqslant \big(\sum_{j=1}^{p} \mathcal{N}(\mathbf{e}_j)\big)\mathcal{N}_\infty$ et la norme $\mathcal{N}_\infty$ est plus fine que $\mathcal{N}$.

On admet que la norme $\mathcal{N}$ est plus fine que la norme $\mathcal{N}_\infty$. cqfd

Remarque. Ce théorème est fondamental ; il indique que sur un **K**-espace vectoriel normé de dimension finie, il n'y a qu'*une seule* notion de convergence.

Chapitre 3

Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$, et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p > 0$.

La donnée d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ définit trois normes (fondamentales) sur E :

$$\mathcal{N}_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} |x_j| \quad \mathcal{N}_2(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j|^2} \quad \mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = \sup_{j=1..p} |x_j|$$

avec $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \mathbf{e}_j$; les x_j sont donc les composantes de $\mathbf{x}$ relatives à la base $\mathcal{B}$.

Toutes les normes sur E étant équivalentes, en particulier les trois normes précédentes, on définit sur E une *seule* notion de convergence des suites.

1 Parties bornées

Dans cette section, F désigne un K-espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une norme notée $\| \ \|$.

1.1 Un peu de vocabulaire

Définition 1.1 (Partie bornée).
Une *partie* A de F est dite *bornée* si, et seulement si, il existe un boule fermée $\mathcal{B}_f(\mathbf{0}, M)$ de centre $\mathbf{0}$ et de rayon M contenant A, *i.e.* :

$$\boxed{A \text{ est une partie bornée de } F \iff \exists M > 0,\ \forall \mathbf{a} \in A,\ \|\mathbf{a}\| \leqslant M}$$

Définition 1.2 (Application bornée).
Une *application* $\mathbf{f} : X \to F$ où X est un ensemble non vide, est dite *bornée* si, et seulement si, l'ensemble $\mathbf{f}(X) = \{\mathbf{f}(x),\ x \in X\}$ est borné dans F, *i.e.* :

$$\boxed{\mathbf{f} : X \to F \text{ est une application bornée} \iff \exists M > 0,\ \forall x \in X,\ \big\|\mathbf{f}(x)\big\| \leqslant M}$$

Définition 1.3 (Suite bornée).
Une *suite* $(\mathbf{u}_n)_n$ d'éléments de F est dite *bornée*, si, et seulement si, l'ensemble $\{\mathbf{u}_n \ / \ n \in \mathbf{N}\}$ est borné dans F, *i.e.* :

$$\boxed{\text{La suite } (\mathbf{u}_n)_n \text{ est bornée} \iff \exists M > 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ \|\mathbf{u}_n\| \leqslant M}$$

Remarque. Attention ! Le nombre M est *indépendant* de $\mathbf{a} \in A$ (resp. de $x \in X$, resp. de $n \in \mathbf{N}$).

Proposition 1.1 (Indépendance de la norme choisie).
La notion de partie bornée sur un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas de la norme choisie.

Preuve. Soit $\mathcal{N}$ une autre norme sur F ; puisque toutes les normes sur F sont équivalentes, il existe deux nombres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\| \ \| \leqslant \mathcal{N} \leqslant \beta\| \ \|$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A \text{ partie bornée pour } \| \ \| &\iff \exists M > 0,\ \forall \mathbf{a} \in A,\ \|\mathbf{a}\| \leqslant M \\ &\implies \exists M_1 = \beta M,\ \forall \mathbf{a} \in A,\ \mathcal{N}(\mathbf{a}) \leqslant \beta\|\mathbf{a}\| \leqslant \beta M = M_1 \end{aligned}$$

La réciproque se démontre en utilisant l'inégalité $\| \ \| \leqslant \frac{1}{\alpha}\mathcal{N}$

Ainsi A est une partie bornée pour la norme $\| \ \|$ si, et seulement si, A est une partie bornée pour la norme $\mathcal{N}$. cqfd

Remarque. Attention ! La borne M dépend de la norme choisie.

Proposition 1.2 (Suite convergente et suite bornée).
Une suite convergente est une suite bornée. La réciproque est fausse.

Preuve. Soient $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite convergente et $\mathbf{a}$ sa limite ; pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang N_1 à partir duquel $\|\mathbf{u}_n\| - \|\mathbf{a}\| \leqslant \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| \leqslant 1$; d'où

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant N_1 \implies \|\mathbf{u}_n\| \leqslant \|\mathbf{a}\| + 1$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \|\mathbf{u}_n\| \leqslant \max\{\|\mathbf{u}_0\|, \dots, \|\mathbf{u}_{N_1-1}\|, \|\mathbf{a}\| + 1\}$$

La suite $\big((-1)^n\big)_n$ est un contre-exemple sur $\mathbf{R}$. cqfd

1.2 Espace vectoriel des applications bornées

Définition 1.4 (Ensemble des applications bornées).
Soit X un ensemble non vide et $(F, \|\ \|)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ; on note $\mathcal{B}(X, F)$ l'ensemble des *applications bornées de X à valeurs dans F.*

Définition 1.5 (Norme uniforme).
Pour $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(X, F)$, on pose :

$$\boxed{\|\mathbf{f}\|_\infty = \sup\big\{\big\|\mathbf{f}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\}}$$

Proposition 1.3. $\big(\mathcal{B}(X, F), \|\ \|_\infty\big)$ *est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé.*

Preuve. Soient $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{B}(X, F)^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $M_{\mathbf{f}}$ (resp. $M_{\mathbf{g}}$) le nombre réel positif tel que :

$$\forall x \in X,\ \|\mathbf{f}(x)\| \leqslant M_{\mathbf{f}} \text{ (resp. } \|\mathbf{g}(x)\| \leqslant M_{\mathbf{g}})$$

Alors, pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}\big\|\big(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}\big)(x)\big\| = \big\|\lambda\mathbf{f}(x) + \mu\mathbf{g}(x)\big\| &\leqslant |\lambda|\big\|\mathbf{f}(x)\big\| + |\mu|\big\|\mathbf{g}(x)\big\| \\ &\leqslant |\lambda| M_{\mathbf{f}} + |\mu| M_{\mathbf{g}}\end{aligned}$$

et donc $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g} \in \mathcal{B}(X, F)$. Puisque la fonction nulle est bornée, $\mathcal{B}(X, F)$ est un $\mathbf{K}$-sous-espace vectoriel du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ de toutes les applications de X vers F.

Montrons maintenant que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, F)$.
La borne supérieure de l'ensemble $\big\{\|\mathbf{f}(x)\| \,/\, x \in X\big\}$ existe dans $\mathbf{R}_+$ puisque cet ensemble est non vide et majoré ; $\|\ \|_\infty$ est bien une application de $\mathcal{B}(X, F)$ vers $\mathbf{R}_+$.
Axiome de séparation :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\|_\infty = \sup\big\{\big\|\mathbf{f}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\} = 0 \\ \iff \forall x \in X,\ \big\|\mathbf{f}(x)\big\| = 0 \iff \forall x \in X,\ \mathbf{f}(x) = \mathbf{0} \\ \iff \mathbf{f} \text{ est l'application nulle ;}\end{aligned}$$

Axiome d'homogénéité :

$$\begin{aligned}\|\lambda\mathbf{f}\|_\infty &= \sup\big\{\big\|\lambda\mathbf{f}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\} = \sup\big\{|\lambda|\ \big\|\mathbf{f}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\} \\ &= |\lambda| \sup\big\{\big\|\mathbf{f}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\} = |\lambda|\ \|\mathbf{f}\|_\infty\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire : des inégalités vraies pout tout $x \in X$

$$\big\|\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)\big\| \leqslant \big\|\mathbf{f}(x)\big\| + \big\|\mathbf{g}(x)\big\| \leqslant \|\mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty$$

on tire que $\|\mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\big\{\big\|\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\}$ et donc :

$$\|\mathbf{f}\|_\infty + \|\mathbf{g}\|_\infty \geqslant \sup\big\{\big\|\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)\big\| \ /\ x \in X\big\} = \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_\infty$$

cqfd

2 Suites

2.1 Suites convergentes et coordonnées

Théorème 2.1 (Coordonnées de la limite).
Une suite d'éléments d'un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie est convergente si, et seulement si, ses coordonnées dans une base sont convergentes.*
Dans ce cas, les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées.

PREUVE. Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{N}_\infty$ la norme sur E définies par $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{x}) = \sup_j |x_j|$ où les x_j sont les coordonnées de $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}_n)_n \text{ est une suite convergente vers } \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{p} a_j \mathbf{e}_j & \\
\iff \mathcal{N}_\infty(\mathbf{u}_n - \mathbf{a}) = \sup_{j \in [\![1,p]\!]} |u_{n,j} - a_j| \xrightarrow[n]{} 0 & \\
\iff \forall j \in [\![1,p]\!],\ |u_{n,j} - a_j| \xrightarrow[n]{} 0 & \\
\iff \forall j \in [\![1,p]\!],\ \text{la suite } (u_{n,j})_n \text{ converge vers } a_j. &
\end{aligned}$$

cqfd

Remarque. On retrouve bien la convergence naturelle d'une suite de vecteurs, à savoir la convergence des suites des coordonnées. Cette convergence est *indépendante de la base choisie* et *indépendante de la norme uilisée.*

2.2 Cas des suites complexes

Théorème 2.2 (Parties réelle et imaginaire de la limite d'une suite convergente).
Une suite de nombres complexes est convergente si, et seulement si, ses parties réelle et imaginaire sont des suites convergentes.
Dans ce cas, la partie réelle (resp. imaginaire) de la limite est la limite dela suite des parties réelles (resp. imaginaires).

PREUVE. Appliquez le théorème précédent au $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ et à sa base canonique $(1, i)$.
cqfd

3 Suites de Cauchy

3.1 Un peu de vocabulaire

Définition 3.1 (Suite de Cauchy).
Une suite $(\mathbf{u}_n)_n$ à valeurs dans E est dite *suite de Cauchy*, si, et seulement si,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ n \geqslant N_\varepsilon \implies \|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| \leqslant \varepsilon}$$

Remarques.
L'inégalité $\|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| \leqslant \varepsilon$ doit être vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$ à partir d'un certain rang N_ε.
Une suite $(\mathbf{u}_n)_n$ d'éléments de E *n'est pas* une suite de Cauchy, si, et seulement si,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbf{N},\ \exists (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ n \geqslant N \text{ et } \|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| > \varepsilon$$

La suite réelle de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ n'est pas une suite de Cauchy car

$$\forall n > 0,\ u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

On prendra $\varepsilon = 1/2$ et $n = k = N$.

Proposition 3.1 (Indépendance de la norme choisie).
La notion de suite de Cauchy est indépendante *de la norme choisie.*

Preuve. Soit $\mathcal{N}$ une autre norme sur E, donc équivalente à la norme $\|\ \|$; il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\|\ \| \leqslant \mathcal{N} \leqslant \beta\|\ \|$. Alors, en posant $N'_\varepsilon = N_{\varepsilon/\beta}$, on a :

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ n \geqslant N'_\varepsilon \implies \mathcal{N}(\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n) \leqslant \beta\|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| \leqslant \beta\frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$$

Ainsi, toute suite de Cauchy pour la norme $\|\ \|$ est une suite de Cauchy pour la norme $\mathcal{N}$.

La réciproque se démontre en échangeant les rôles de $\|\ \|$ et de $\mathcal{N}$ et en utilisant l'inégalité $\|\ \|_\infty \leqslant \frac{1}{\alpha}\mathcal{N}$.

Attention ! Le rang N_ε dépend de la norme choisie. cqfd

3.2 Convergence des suites de Cauchy

Proposition 3.2 (Suite de Cauchy et coordonnées).
Une suite d'éléments de E est une suite de Cauchy si, et seulement si, ses coordonnées dans une base sont des suites de Cauchy de $\mathbf{K}$.

Preuve. Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{N}_\infty$ la norme habituelle associée à $\mathcal{B}$ et $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de Cauchy de E. On a :

$$\big(n \geqslant N_\varepsilon \implies \|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\|_\infty = \sup_{j \in [\![1,p]\!]} |u_{n+k,j} - u_{n,j}| \leqslant \varepsilon\big)$$
$$\iff \big(\forall j \in [\![1,p]\!],\ n \geqslant N_\varepsilon \implies |u_{n+k,j} - u_{n,j}| \leqslant \varepsilon\big)$$

ce qui montre que $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy de E si, et seulement si, les suites $(u_{n,j})_n$ pour $j \in [\![1,p]\!]$ sont des suites de Cauchy de $\mathbf{K}$. cqfd

Théorème 3.3 (Convergence des suites de Cauchy).
Une suite à valeurs dans E est convergente si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy.

Preuve.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soient $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite convergente d'éléments de E de limite $\mathbf{a}$, ε un nombre strictement positif et $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ le rang à partir duquel $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| \leqslant \varepsilon$; alors

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ n \geqslant N_\varepsilon \implies$$
$$\|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| = \|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{a} + \mathbf{a} - \mathbf{u}_n\| \leqslant \|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| \leqslant 2\varepsilon$$

et la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On admet que toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbf{R}$ est une suite convergente.

Toute suite de Cauchy $(z_n)_n$ à valeurs complexes, a ses parties réelle et imaginaire qui sont des suites de Cauchy : ce sont les suites composantes relatives à la base canonique de $\mathbf{C}$; ces suites sont convergentes et donc $(z_n)_n$ est convergente.

Toute suite de Cauchy $(\mathbf{u}_n)_n$ d'éléments de E a ses composantes relativement à une base de E qui sont des suites de Cauchy de $\mathbf{K}$; ces suites sont convergentes et donc $(\mathbf{u}_n)_n$ converge. cqfd

Proposition 3.4 (Suite de Cauchy et application lipschitzienne).
L'image d'une suite de Cauchy par une application lipschitzienne est une suite de Cauchy.

Preuve. Soient $(E, \mathcal{N})$, $(F, \|\ \|)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, $\mathbf{f} : A \subset E \mapsto F$ une application $k_\mathbf{f}$-lipschitzienne et $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de A. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a :

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ n \geqslant N_\varepsilon \implies \big\|\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+k}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_n)\big\| \leqslant k_\mathbf{f}\mathcal{N}(\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n) \leqslant k_\mathbf{f}\varepsilon$$

cqfd

Proposition 3.5 (Un critère).
Soient $q \in]0,1[$ et une suite $(\mathbf{u}_n)_n$ de E vérifiant $\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\| \leqslant q^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; alors, la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite convergente, et si $\mathbf{a}$ est la limite de $(\mathbf{u}_n)_n$, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}$$

Preuve. Montrons que la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy. Pour $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n &= (\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_{n+k-1}) + \cdots + (\mathbf{u}_{n+2} - \mathbf{u}_{n+1}) + (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \\ &= \sum_{r=1}^{k} (\mathbf{u}_{n+r} - \mathbf{u}_{n+r-1})\end{aligned}$$

car les termes se détruisent deux à deux. En prenant la norme, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| &= \Big\|\sum_{r=1}^{k} (\mathbf{u}_{n+r} - \mathbf{u}_{n+r-1})\Big\| \leqslant \sum_{r=1}^{k} \|\mathbf{u}_{n+r} - \mathbf{u}_{n+r-1}\| \\ &\leqslant \sum_{r=1}^{k} q^{n+r-1} = \frac{q^n - q^{n+k}}{1-q} \leqslant \frac{q^n}{1-q}\end{aligned}$$

et puisque q^n tend vers 0, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ à partir duquel $q^n/(1-q) \leqslant \varepsilon$; ainsi

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ n \geqslant N_\varepsilon \implies \|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \leqslant \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy, donc une suite convergnte.

En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité $\|\mathbf{u}_{n+k} - \mathbf{u}_n\| \leqslant q^n/(1-q)$, on obtient l'inégalité demandée. cqfd

4 Relations de comparaison entre suites

4.1 Domination, notation O

Définition 4.1 (Domination).
Soient $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de E et $(\alpha_n)_n$ une suite de $\mathbf{K}$; on dit que la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est *dominée* par $(\alpha_n)_n$ et on écrit $\mathbf{u}_n = \mathrm{O}(\alpha_n)$, si et seulement si,

$$\exists M > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > N \implies \|\mathbf{u}_n\| \leqslant M|\alpha_n|$$

Remarque. Si $(\alpha_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ *i.e.* si la suite $(\alpha_n)_n$ ne s'annule pas, on a :

Si, pour tout n, $\alpha_n \neq 0$, alors $\mathbf{u}_n = \mathrm{O}(\alpha_n) \iff$ la suite $\big(\frac{1}{\alpha_n}\mathbf{u}_n\big)_n$ est une suite bornée.

Exemple 4.1.
$n^\alpha = \mathrm{O}(n^\beta) \iff \big(\frac{n^\alpha}{n^\beta}\big)_n = (n^{\alpha-\beta})_n$ est bornée $\iff \alpha - \beta \leqslant 0$
Pour $(a,b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, $a^n = \mathrm{O}(b^n)$ si, et seulement si, la suite $\big(a^n/b^n\big)_n$ est bornée, *i.e.*, si, et seulement si, $|a| \leqslant |b|$.

4.2 Négligeabilité, notation o

Définition 4.2 (Négligeabilité).
Soient $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de E et $(\alpha_n)_n$ une suite de $\mathbf{K}$; on dit que la suite $(\mathbf{u}_n)_n$ est *négligeable* devant $(\alpha_n)_n$ et on écrit $\mathbf{u}_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$, si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant N_\varepsilon \implies \|\mathbf{u}_n\| \leqslant \varepsilon\, |\alpha_n|$$

Remarque. Si $(\alpha_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ *i.e.* si la suite $(\alpha_n)_n$ ne s'annule pas, on a :

$$\boxed{\text{Si, pour tout } n,\ \alpha_n \neq 0, \text{ alors } \mathbf{u}_n = \mathrm{o}(\alpha_n) \iff \text{la suite } \big((1/\alpha_n)\mathbf{u}_n\big)_n \text{ est limite } \mathbf{0}}$$

Exemple 4.2.
$n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta) \iff \big(\dfrac{n^\alpha}{n^\beta}\big)_n = \big(n^{\alpha-\beta}\big)_n$ tend vers 0 $\iff \alpha - \beta < 0$
Pour $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, $a^n = \mathrm{o}(b^n)$, si, et seulement si, $\Big(\Big(\dfrac{a}{b}\Big)^n\Big)_n$ tend vers 0, soit $|a| < |b|$.
$\ln n = \mathrm{o}(n^\alpha) \iff \alpha > 0$ et pour tout α, $n^\alpha = \mathrm{o}(\exp n)$

4.3 Équivalence, notation $\underset{n}{\sim}$

Définition 4.3 (Équivalence).
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites *complexes* ; on dit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont *équivalentes* et on écrit $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ si, et seulement si, $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.

$$u_n \underset{n}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$$

Remarque. Si $(v_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ *i.e.* si la suite $(v_n)_n$ ne s'annule pas, on a :

$$\boxed{\text{Si pour tout } n,\ v_n \neq 0, \text{ alors } u_n \underset{n}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n]{} 1}$$

Exemple 4.3.
$n^\alpha \underset{n}{\sim} n^\beta \iff \big(\dfrac{n^\alpha}{n^\beta}\big)_n = \big(n^{\alpha-\beta}\big)_n$ tend vers 1 $\iff \alpha = \beta$.
Pour $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, $a^n \underset{n}{\sim} b^n$si, et seulement si, $\big(\big(\frac{a}{b}\big)^n\big)_n$ tend vers 1 soit $a = b$.
$\ln n \underset{n}{\sim} n^\alpha$ et $n^\alpha \underset{n}{\sim} \exp n$ sont toujours **faux**.

Voici quelques propriétés des relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence.

- Les relations de prépondérance, de négligeabilité et d'équivalence ne dépendent pas de la norme choisie.
- $\mathbf{u}_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$ implique $\mathbf{u}_n = \mathrm{O}(\alpha_n)$; la réciproque est fausse.
- $u_n \underset{n}{\sim} 0 \iff$ la suite $(u_n)_n$ stationne en 0, *i.e.* la suite $(u_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang ; on évitera d'écrire cette relation.
- $\underset{n}{\sim}$ est une relation d'équivalence.
- $u_n \underset{n}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n}{\sim} |v_n|$
- $u_n \underset{n}{\sim} v_n \implies \big(u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(u_n)\big)$; la réciproque est fausse.
- $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et $u_n = \mathrm{O}(w_n) \implies v_n = \mathrm{O}(w_n)$, idem avec o.
- $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et $w_n = \mathrm{O}(u_n) \implies w_n = \mathrm{O}(v_n)$, idem avec o.
- Si la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ avec $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{n}{\sim} \ell$.
- Si $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

– Si $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{n}{\sim} v'_n$, alors $u_n u'_n \underset{n}{\sim} v_n v'_n$.
– Si $(v_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ implique $\dfrac{1}{u_n} \underset{n}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
– $\exp u_n \underset{n}{\sim} \exp v_n \iff u_n - v_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$
– $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et $\lim_n \ln v_n \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{1\} \implies \ln u_n \underset{n}{\sim} \ln v_n$

4.4 Comparaison logarithmique de deux suites de $]0, +\infty[$

Lemme 4.1. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de $]0, +\infty[$; si à partir d'un certain rang on a l'inégalité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la suite $(u_n)_n$ est dominée par la suite $(v_n)_n$.*

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \implies u_n = \mathrm{O}(v_n)$$

Preuve. L'inégalité $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$ s'écrit encore $u_{n+1}/v_{n+1} \leqslant u_n/v_n$. Ainsi la suite $(u_n/v_n)_n$ est une suite décroissante à partir du rang N, donc $u_n/v_n \leqslant u_N/v_N$, soit $u_n \leqslant (u_N/v_N)v_n$, ce qui montre que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. cqfd

Théorème 4.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite de $]0, +\infty[$ telle que $\lim_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ existe dans $[0, +\infty]$; alors :*

(i) si $\ell < 1$, $(u_n)_n$ tend vers 0 et $\forall q \in]\ell, 1[$, $u_n = \mathrm{O}(q^n)$;
(ii) si $\ell > 1$, $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et $\forall q \in]1, \ell[$, $q^n = \mathrm{O}(u_n)$, i.e. *il existe $m > 0$ telle que la suite $(u_n)_n$ soit minorée par $(m\, q^n)_n$ à partir d'un certain rang ;*
(iii) si $\ell = 1$, on ne peut conclure.

Preuve.
(i) Soit $q \in]\ell, 1[$, il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$ et donc $u_n = \mathrm{O}(q^n)$ soit $0 < u_n \leqslant Mq^n$ à partir d'un certain rang. Puisque $(q^n)_n$ tend vers 0 ($q < 1$), il vient que $(u_n)_n$ tend vers 0.
(ii) Soit $q \in]1, \ell[$ et $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel $u_{n+1}/u_n \geqslant q = q^{n+1}/q^n$; le lemme montre que $q^n = \mathrm{O}(u_n)$ soit $q^n \leqslant Mu_n$ à partir d'un certain rang. Comme $(q^n)_n$ tend vers $+\infty$, la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et $u_n \geqslant q^n/M$.
(iii) $u_n = n$ donne u_{n+1}/u_n tend vers 1 et u_n tend vers $+\infty$.
$u_n = 1/n$ donne u_{n+1}/u_n tend vers 1 et u_n tend vers 0.

cqfd

Exemple 4.4. La suite $(z^n/n!)_n$ converge vers 0 pour tout $z \neq 0$.
On pose $u_n = \left|z^n/n!\right| = |z|^n/n!$; alors $u_{n+1}/u_n = \left(|z|^{n+1}/(n+1)!\right) \times \left(n!/|z|^n\right) = |z|/(n+1) \underset{n}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi $\lim_n u_n = 0$ et $\forall q \in]0, 1[$, $u_n = \mathrm{O}(q^n)$.

5 Suites réelles

5.1 Les grands théorèmes

Une suite monotone croissante (resp. décroissante) converge si, et seulement si, elle est majorée (resp. minorée). Dans le cas de la convergence, sa limite est la borne supérieure (resp. inférieure) de ses éléments.

Si une suite converge, toutes ses sous-suites convergent et ont la même limite.

Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent et ont même limite ℓ, alors $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si, et seulement si, $(u_n)_n$ croît, $(v_n)_n$ décroît et $\lim_n(u_n - v_n) = 0$.
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Le théorème d'*encadrement*. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$, trois suites réelles telles que :

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n > \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ et } \exists \ell \in \mathbf{R},\ \lim_n u_n = \lim_n w_n = \ell$$

alors $(v_n)_n$ converge et sa limite est ℓ.

Passage à la limite dans une inégalité. Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$, trois suites réelles ; alors :

$$(\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n > \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n) \implies \left(\lim_n u_n \leqslant \lim_n v_n \leqslant \lim_n w_n\right)$$

Par passage à la limite les inégalités strictes sont transformées en inégalités larges.
Deux remarques techniques

- Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ, on a souvent intérêt à majorer $|u_n - \ell|$ par le terme général d'une suite de limite nulle.
- On peut utiliser la relation : $\sum_{k=p}^{p+q}(u_{k+1} - u_k) = u_{p+q+1} - u_p$, c'est la méthode des dominos.

5.2 Suites définies à l'aide d'une relation de récurrence

Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et f une application continue de D à valeurs réelles.

$I \subset D$ est un intervalle *stable* pour f, ou encore f*-stable*, si, et seulement si, l'image de I par f est contenue dans I, *i.e.* si, et seulement si, le graphe de la restriction $f|_I$ de f à I est contenu dans le carré $I \times I$.

$a \in I$ est un *point fixe* pour f si, et seulement si, $f(a) = a$, *i.e.* si, et seulement si, a est un zéro de $\varphi : x \mapsto f(x) - x$.

Si est un intervalle f-stable, la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite $(u_n)_n$ dont tous les éléments appartiennent à I.

Limite et point fixe. Si la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite de I qui converge vers une limite $\ell \in I$, alors ℓ est un point fixe de I.

Sens de variation. Soient I un intervalle f-stable et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$;

(*i*) si f est croissante sur I, la suite $(u_n)_n$ est monotone, croissante si $u_0 \leqslant u_1$, décroissante si $u_0 \geqslant u_1$;

(*ii*) si f est décroissante sur I, $f \circ f$ est croissante et les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens contraire : si $u_0 \leqslant u_2$, $(u_{2n})_n$ est croissante et $(u_{2n+1})_n$ décroissante ; si $u_0 \geqslant u_2$, $(u_{2n})_n$ est décroissante et $(u_{2n+1})_n$ croissante.

Théorème du point fixe. Soit I un intervalle fermé stable pour une application contractante f de rapport de Lipschitz $k \in [0, 1[$; alors

(*i*) f possède un unique point fixe $a \in I$;

(*ii*) pour tout $x_0 \in I$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = x_0$ converge vers a et on a la majoration :

$$|u_n - a| \leqslant k^n |u_0 - a|$$

5.3 Suites classiques

5.3.1 Suite arithmétique

$(u_n)_n$ est une suite *arithmétique* si, et seulement si, la différence de deux termes consécutifs est constante, *i.e.*

$$\exists r \in \mathbf{C},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

Dans ce cas

$$\forall n,\ u_n = u_0 + nr$$

5.3.2 Suite géométrique

$(u_n)_n$ est une suite *géométrique* si, et seulement si, le quotient de deux termes consécutifs est constant, *i.e.*

$$\exists q \in \mathbf{C},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

Dans ce cas

$$\forall n,\ u_n = q^n u_0 = q^{n-1}u_1 = \dots \text{ et } \sum_{k=n}^{n+p} u_k = u_0 \frac{q^{n+p+1} - q^n}{1-q}$$

5.3.3 Récurrence affine

$(u_n)_n$ est une suite définie à l'aide d'une *récurrence affine* si, et seulement si,

$$\exists (a,b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*,\ a \neq 1,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Le calcul de u_n s'effectue

(i) en recherchant les points fixes par la résolution de $\lambda = a\lambda + b$, soit $\lambda = \frac{b}{1-a}$. La suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$ est une suite géometrique de raison a, ce qui donne $v_n = a^n v_0$ soit $u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$;

(ii) ou bien, en posant $w_n = a^{-n}u_n$; ainsi, $w_{n+1} - w_n = ba^{-n}$ et w_n se calcule en utilisant la méthode des dominos, d'où de $u_n = a^n w_n$.

5.3.4 Suite homographique

$(u_n)_n$ est une suite définie à l'aide d'une *récurrence homographique* si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d},\ ad - bc \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

On recherche les points fixes en résolvant l'équation $x = \frac{ax+b}{cx+d}$ ce qui revient à déterminer les racines d'une équation du second degré.

S'il y a deux racines distinctes α et β, on pose sous réserve d'existence : $v_n = \frac{u_n - \alpha}{v_n - \beta}$. La suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison q à déterminer. De $v_n = q^n v_0$, on tire u_n.

Dans le cas d'une racine double α, la suite $(v_n)_n$ définie pour $u_0 \neq \alpha$, par $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite arithmétique de raison r à calculer. De $v_n = v_0 + nr$, on tire u_n.

5.3.5 Récurrence linéaire d'ordre 2

$(u_n)_n$ est une suite définie à l'aide d'une *récurrence linéaire d'ordre 2* si, et seulement si,

$$\exists (a,b) \in \mathbf{K}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On recherche les suites $(r^n)_n$ solutions en résolvant l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ dont on note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant.
Cas complexe :

(i) si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines distinctes de l'équation caractéristique et

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(ii) si $\Delta = 0$, $\frac{a}{2}$ est l'unique solution de l'équation caractéristique et

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\frac{a}{2})^n(\lambda n + \mu)$$

Cas réel :

(*i*) si $\Delta > 0$, on note r_1 r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique et

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(*ii*) si $\Delta = 0$, $\frac{a}{2}$ est l'unique solution de l'équation caractéristique et

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\frac{a}{2})^n(\lambda n + \mu)$$

(*iii*) si $\Delta < 0$, on note $\alpha \exp(i\beta)$ l'une des racines complexes de l'équation caractéristique et

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha^n(\lambda \cos n\beta + \mu \sin n\beta)$$

Chères lectrices et chers lecteurs, vous avez certainement remarqué l'analogie avec les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants.

Chapitre 4

Séries numériques

Sommaire

1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner un sens à la sommation d'une infinité de termes réels ou complexes, par exemple :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

égalité que les mathématiciens grecs interprètent par :

« La flèche va-t-elle atteindre le talon d'Achille ? »

et

$$0,999\,9\cdots9\cdots=1$$

égalité qui provient du développement décimal d'un nombre réel.

En physique, le théorème de Fourier montre qu'un signal périodique de fréquence ν, par exemple le la d'une flûte, est la somme d'une combinaison linéaire d'un nombre infini de signaux périodiques élémentaires (de sons élémentaires) de fréquences $n\nu$, multiples entiers de cette fréquence ν dite fondamentale.

2 Généralités

2.1 Un peu de vocabulaire

Définitions 2.1 (Série).
À la suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes, on associe la suite $(S_n)_n$ définie par

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k \tag{2.1}$$

On appelle *série de terme général* u_n le couple $((u_n)_n,(S_n)_n)$; elle est notée $\sum u_n$.
S_n est appelé la *somme partielle de rang* n de la série de terme général u_n ; la suite $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de cette série.

Définitions 2.2 (Convergence et divergence d'une série).
On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si, et seulement si, la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge dans $\mathbf{C}$, sinon la série est dite *divergente*.

En cas de convergence, le nombre $S=\lim_n S_n$ est appelé *somme* de la série $\sum u_n$; il est noté $S=\sum_{k=0}^{\infty}u_k$, k joue le rôle d'un indice muet. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on définit le *reste de rang* n par $R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.

Retenons :

$$\boxed{\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{\infty}u_k=\sum_{k\geqslant0}u_k=\lim_n\sum_{k=0}^{n}u_k\\R_n=S-S_n&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k=\lim_p\sum_{k=n+1}^{p}u_k\end{aligned}}$$

Remarques.
Étudier une série $\sum u_n$, c'est d'abord *déterminer sa nature* : convergence ou divergence ; puis, étudier le *comportement* de $(S_n)_n$ en cas de divergence, ou déterminer la *valeur exacte* ou *approchée* de la somme et obtenir des renseignements sur la *vitesse de convergence* vers 0 de la suite des restes d'ordre n en cas de convergence.

On *ne modifie pas la nature* de la série $\sum u_n$ en changeant un nombre fini de termes : on ajoute une constante à S_n à partir d'un certain rang ; par contre, on modifie la somme de cette série en cas de convergence.

On peut *supprimer les termes nuls* d'une série sans en modifier ni la nature, ni la somme : $\sum\big(1+(-1)^n\big)/n$ s'écrit aussi $\sum 2/(2p)$. Par contre, regroupement de termes et modification de l'ordre des termes ne peuvent s'effectuer *sans précaution*.

2.2 Condition NÉCESSAIRE de convergence, divergence grossière

Proposition 2.1. *Si la série $\sum u_n$ est convergente, la suite $(R_n)_n$ des restes tend vers 0.*

PREUVE. Puisque $S = \lim_n S_n$, $R_n = S - S_n$ tend vers 0. cqfd

Théorème 2.2 (Condition NÉCESSAIRE de convergence).
Si la série $\sum u_n$ est convergente, la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 ; la réciproque est FAUSSE.
Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente.

PREUVE. Pour $n > 0$, $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n}{\longrightarrow} S - S = 0$.
La série $\sum 1/n$ est une série divergente car $S_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n \underset{n}{\sim} \ln n$ et donc $S_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$. cqfd

Définition 2.3 (Divergence grossière).
On dit que la série $\sum u_n$ *diverge grossièrement* si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0.

2.3 Convergence des séries à termes complexes

Proposition 2.3 (Convergence des séries parties réelle et imaginaire).
La série à termes complexes $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, les deux séries à termes réels $\sum \Re\mathrm{e}(u_n)$ et $\sum \Im\mathrm{m}(u_n)$ sont convergentes et dans ce cas :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Re\mathrm{e}(u_k) + i \sum_{k=0}^{\infty} \Im\mathrm{m}(u_k)}$$

PREUVE. La suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \Re\mathrm{e}(u_k) + i \sum_{k=0}^{n} \Im\mathrm{m}(u_k) = A_n + iB_n$ converge si, et seulement si, les suites réelles $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$ sont convergentes, et dans ce cas $S = \lim_n S_n = \lim_n A_n + i \lim_n B_n$. cqfd

2.4 Critère de Cauchy

Théorème 2.4 (Critère de Cauchy pour une série).
La série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall (n,p) \in \mathbf{N}^2,\ n > N_\varepsilon \implies \Big|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\Big| < \varepsilon}$$

PREUVE. La série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles est convergente, si, et seulement si, la suite $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy, si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall (n,p) \in \mathbf{N}^2,\ n > N_\varepsilon \implies |S_{n+p} - S_{n-1}| < \varepsilon$$

Or, $S_{n+p} - S_{n-1} = \sum_{k=n}^{n+p} u_k$. cqfd

2.5 Combinaison linéaire de séries convergentes

Théorème 2.5. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* convergentes *; alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$ la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Ainsi, l'ensemble des séries convergentes à valeurs dans $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et l'application $\sum u_n \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est une forme linéaire sur cet espace.

Preuve. Soient $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$; alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k = \lambda S_n + \mu T_n \underset{n}{\longrightarrow} \lambda S + \mu T$$

ce qui montre que la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et que sa somme vaut $\lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. cqfd

Remarques. Si $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

Si la série $\sum u_n$ est convergente, les séries $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$ sont de même nature ; en particulier, si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum v_n$ est divergente, alors la série $\sum(u_n+v_n)$ est divergente.

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes, on ne peut rien affirmer *a priori* quant à la nature de la série $\sum(u_n + v_n)$.

3 Les exemples de base

3.1 La série géométrique

Définition 3.1 (Série géométrique).
C'est la série $\sum q^n$ avec $q \in \mathbf{C}$; q s'appelle la *raison*.

Théorème 3.1 (Nature de la série géométrique).
La série géométrique $\sum q^n$ converge si, et seulement si, le module de la raison est plus petit que 1, et on a :

$$\boxed{\forall |q| < 1,\ \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \ \textit{et}\ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}}$$

Preuve.
Si $|q| \geqslant 1$, la suite $(q^n)_n$ ne tend pas vers 0 et la série $\sum q^n$ diverge (grossièrement).

Si $|q| < 1$, la suite $(q^n)_n$ tend vers 0 et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q} \tag{3.1}$$

Dans ce cas, la série converge, sa somme $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ vaut $(1-q)^{-1}$ et $R_n = S - S_n = q^{n+1}(1-q)^{-1}$. cqfd

3.2 Série à destruction de termes ou série télescopique

Définition 3.2 (Série télescopique).
Ce sont les séries $\sum u_n$ où le terme général u_n peut s'écrire sous la forme

$$\exists \text{ une suite } (v_n)_n,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n \tag{3.2}$$

Théorème 3.2 (Convergence et somme d'une série télescopique).
La série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ *converge si, et seulement si, la* suite $(v_n)_n$ *est convergente et, dans ce cas, on a :*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim v_n - v_0 \tag{3.3}$$

Preuve.

La somme partielle de rang n S_n se calcule ainsi :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0 \tag{3.4}$$

La suite $(S_n)_n$ converge si, et seulement si, la suite $(v_n)_n$ est convergente ; dans ce cas, on a

$$\lim_n S_n = \sum_{k=0}^{\infty}(v_{k+1} - v_k) = \lim_n v_{n+1} - v_0 = \lim_n v_n - v_0 \tag{3.5}$$

cqfd

Exemples 3.1.

La série $\sum \ln\big(1+1/(n+1)\big)$: on a $u_n = \ln\big(1+1/(n+1)\big) = \ln(n+2) - \ln(n+1) = v_{n+1} - v_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} = v_{n+1} - v_0 = \ln(n+2)$ tend vers $+\infty$.

$$\text{La série } \sum \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \text{ est divergente}$$

La série $\sum 1/\big(n(n+1)\big)$: on a $u_n = 1/\big(n(n+1)\big) = -1/(n+1) - 1/n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = v_{n+1} - v_1 = 1 - 1/(n+1)$ tend vers 1.

$$\text{La série } \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

La série $\sum 1/\big(n(n+1)\cdots(n+p)\big)$ avec $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$; on pose :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} &= \frac{1}{p}\frac{n+p-n}{n(n+1)\cdots(n+p)} \\ &= \frac{1}{p}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{p}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} = v_n - v_{n+1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

et $\sum_{k=1}^{n} u_k = v_1 - v_{n+1} \xrightarrow[n]{} v_1$

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \text{ la série } \sum \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)} = \frac{1}{p(p!)}}$$

3.3 La série du logarithme

$$\boxed{\begin{gathered} \forall x \in \,]-1,1],\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \\ \forall x \in [-1,1[,\ \ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} \end{gathered}}$$

Preuve. Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}$ et puisque

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-t)^k + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \tag{3.7}$$

on obtient :

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^k + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t \tag{3.8}$$
$$= \text{somme partielle} + \text{reste}$$

En utilisant le changement de variable $t = xu$ pour $x \neq 0$, on a

$$\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-xu)^{n+1}}{1+xu} x \,\mathrm{d}u = (-1)^{n+1} x^{n+2} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+xu} \,\mathrm{d}u \tag{3.9}$$

et

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+xu} \,\mathrm{d}u = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1-|x|u} \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1-|x|} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{(1-|x|)} \frac{1}{(n+2)} & \text{si } x \in \left]-1, 0\right[\\ \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+|x|u} \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+x} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{(1+x)} \frac{1}{(n+2)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| = |x|^{n+2} \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+xu} \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{u^{n+1}}{1+xu} \,\mathrm{d}u \text{ si } x \in \left]-1, 1\right]$$
$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{(1-|x|)} \dfrac{1}{(n+2)} \xrightarrow[n]{} 0 & \text{si } x \in \left]-1, 0\right] \\ \dfrac{1}{n+2} \xrightarrow[n]{} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

cqfd

Remarque. La série $\sum x^n/n$ diverge grossièrement pour $|x| > 1$ et pour $x = 1$ (série harmonique).

3.4 La série de l'arctangente

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$$

Preuve. On utilise l'égalité valable pour $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k + \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \text{somme partielle} + \text{reste} \end{aligned} \tag{3.10}$$

et la majoration du reste pour $|x| \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(xu)^{2n+2}}{1+(xu)^2} x \,\mathrm{d}u \right| = |x|^{2n+3} \int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \,\mathrm{d}u \\ &\leqslant |x|^{2n+3} \int_0^1 u^{2n+2} \,\mathrm{d}u = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3} \end{aligned} \tag{3.11}$$

cqfd

3.5 La série de l'exponentielle

$$\forall z \in \mathbf{C},\ \exp z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$
$$\cos z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\operatorname{ch} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Preuve. Utilisation de l'inégalité de Taylor à l'ordre $n+1$: soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, f une application à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, M_{n+1} un majorant de la dérivée d'ordre $n+1$ sur I, soit $\forall t \in I$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M_{n+1}$ (attention, un tel majorant n'existe pas toujours) ; alors :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.12}$$

On applique l'inégalité de Taylor à $I = [0,1]$ et $f : t \mapsto \exp(zt)$, application de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbf{R}$. Le calcul de la dérivée d'ordre k donne :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \forall t \in \mathbf{R},\ f^{(k)}(t) = z^k \exp(zt) \text{ et } f^{(k)}(0) = z^k \exp(zt)|_{t=0} = z^k \tag{3.13}$$
$$\forall t \in [0,1],\ \left|f^{(n+1)}(t)\right| = |z|^{n+1} \left|\exp(zt)\right| = |z|^{n+1} e^{(\Re\mathrm{e}\, z)t} \leqslant |z|^{n+1} e^{|\Re\mathrm{e}\, z|} = M_{n+1} \tag{3.14}$$

Ainsi :

$$\left| \exp(z) - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} z^k \right| = \left| \exp(z) - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant e^{|\Re\mathrm{e}\, z|} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{3.15}$$

Les développements de sin, cos, sh et ch s'en déduisent par combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z = \frac{\exp z - \exp(-z)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{2} \frac{z^k}{k!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \cos z = \frac{\exp iz + \exp(-iz)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{1+(-1)^k}{2} \frac{z^k}{k!} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \end{aligned} \tag{3.17}$$

cqfd

3.6 La série du binôme

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \frac{x^k}{k!}$$

Preuve. Rappelons la formule de Taylor à l'ordre $n+1$ avec reste intégral : soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, f une application à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I ; alors pour tout a et tout b

dans I :

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}\big(a+(b-a)u\big)\,\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{3.18}$$

la seconde égalité s'obtenant à l'aide du changement de variable $t = a + (b-a)u$.
Pour $b = x$ et $a = 0$, on obtient :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \tag{3.19}$$

On applique (3.19) à la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$; par dérivation :

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \tag{3.20}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \tag{3.21}$$

Utilisant la décroissance de $u \in [0,1] \mapsto \dfrac{1-u}{1+xu}$ pour $x > -1$ fixé, le reste intégral se majore à l'aide de :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_0^1 (1-u)^n (1+xu)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^1 (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{3.22}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
&\Big|(1+x)^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!}\Big| \\
&\qquad = \Big|\frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+xu)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}u\Big| \\
&\qquad \leqslant \big|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\big| \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = u_n
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x| \underset{n}{\longrightarrow} |x|$, ce qui montre que u_n tend vers 0 pour tout $x \in]-1, 1[$. cqfd

4 Les séries à termes positifs

4.1 La situation

Définition 4.1 (Série à termes positifs).
On dit que $\sum u_n$ est une série à *termes positifs* si, et seulement si, $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

La modification d'un nombre fini des termes d'une série et la multiplication par -1 ne modifient pas la nature d'une série, mais modifient la somme de cette série. C'est pourquoi, tous les théorèmes de ce paragraphe qui concernent la nature d'une série à termes positifs sont encore valables pour les séries de signe constant à partir d'un certain rang.

Proposition 4.1 (Monotonie de la suite des sommes partielles).
Si la série $\sum u_n$ est à termes positifs, la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles est une suite monotone croissante.

Preuve. Pour tout n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. cqfd

4.2 Le théorème fondamental

Théorème 4.2 (Caractérisation de la convergence d'une série à termes positifs).
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ; la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_n)_n$ est majorée et dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_n S_n = \sup_n S_n$$

Sinon, la série $\sum u_n$ est divergente et la suite $(S_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Preuve. La suite $(S_n)_n$ est croissante et donc la suite $(S_n)_n$ converge si, et seulement si, elle est majorée ; dans ce cas, la limite de $(S_n)_n$ est la borne supérieure de ses éléments.

Si la suite $(S_n)_n$ n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$ puisqu'elle est croissante. cqfd

4.3 Série majorante, série minorante

Définitions 4.2 (Série majorante, série minorante).
On dit que la série $\sum v_n$ est une *série majorante* de la série $\sum u_n$ si, et seulement si, $\sum v_n$ est une série à termes positifs qui vérifient

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n;$$

On dit que la série $\sum v_n$ est une *série minorante* de la série $\sum u_n$ si, et seulement si, $\sum v_n$ est une série à termes positifs qui vérifient

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant u_n;$$

Théorème 4.3 (Critère de comparaison).
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

(i) *Si $\sum v_n$ est une série* majorante convergente *de la série $\sum u_n$, alors la série $\sum u_n$ converge et*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

(ii) *si $\sum v_n$ est une série minorante divergente de $\sum u_n$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum v_n \text{ convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum u_n \text{ convergente} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \end{array}\right.}$$

Preuve. Des inégalités

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k = T_n \leqslant \lim_n T_n = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \tag{4.1}$$

on tire que la suite $(S_n)_n$ est une suite majorée par T ; elle converge puisqu'elle est croissante et sa limite S est majorée par T, soit :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leqslant T = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Par passage à la limite sur p dans les inégalités $\sum_{k=n}^{n+p} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} v_k$, on obtient que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Si la série $\sum v_n$ est divergente, la suite $(T_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et l'inégalité $T_n \leqslant S_n$ montre le résultat. cqfd

Remarques.
Pour montrer la convergence d'une série à termes positifs, on recherche une série *majorante convergente.*

Pour montrer la divergence d'une série à termes positifs, on recherche une série *minorante divergente.*

Proposition 4.4. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* convergentes *à termes réels ; alors :*

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n \implies \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

PREUVE. La série $\sum(v_n - u_n)$ est une série convergente à termes positifs et l'inégalité $0 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(v_k - u_k) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ donne le résultat. cqfd

Proposition 4.5 (Utilisation de O).
Considérons deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$; alors :

(*i*) *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est une série convergente ;*
(*ii*) *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ est une série divergente.*

PREUVE. Il existe $M > 0$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$ à partir d'un certain rang, ce qui montre que $\sum M v_n$ est une série majorante de $\sum u_n$ et que $\sum \frac{1}{M} u_n$ est une série minorante de $\sum v_n$. cqfd

4.4 Règle des équivalents

Théorème 4.6 (Règle des équivalents).
Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs et $\sum v_n$ une série à termes réels ; alors

$$\boxed{u_n \underset{n}{\sim} v_n \implies \text{les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}}$$

PREUVE. Puisque $u_n \underset{n}{\sim} v_n$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ de limite nulle, telle que $v_n = (1 + \varepsilon_n) u_n$. À partir d'un rang N, on a $-\frac{1}{2} < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{2} < 1 + \varepsilon_n < \frac{3}{2}$, et donc :

$$\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant \frac{1}{2} u_n \leqslant (1 + \varepsilon_n) u_n = v_n \leqslant \frac{3}{2} u_n$$

Ainsi, à partir du rang N, $(v_n)_n$ est une suite à termes positifs, $\sum \frac{3}{2} u_n$ est une série majorante de $\sum v_n$, et $\sum \frac{1}{2} u_n$ est une série minorante de $\sum v_n$. on en conclut que la convergence de $\sum u_n$ implique la convergence de $\sum v_n$ et la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$. cqfd

4.5 Comparaison logarithmique, règle de D'Alembert

Proposition 4.7 (Comparaison logarithmique).
Considérons deux séries à termes strictement positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang ; alors :

(*i*) *la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$;*
(*ii*) *la divergence de $\sum u_n$ implique la divergence de $\sum v_n$.*

PREUVE. La suite $(u_n/v_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang N, ce qui donne les inégalités

$$\forall n \geqslant N,\ 0 < u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n \text{ et } 0 < \frac{v_N}{u_N} u_n \leqslant v_n$$

La règle de comparaison donne le résultat. cqfd

Théorème 4.8 (Règle de D'Alembert).
Soit $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs tels que* $\ell = \lim_n u_{n+1}/u_n$ *existe dans* $\overline{\mathbf{R}_+} = [0, +\infty]$ *;*
(*i*) *si* $\ell < 1$*, la série* $\sum u_n$ *converge ;*
(*ii*) *si* $\ell > 1$*,* u_n *tend vers* $+\infty$ *et la série* $\sum u_n$ *diverge (grossièrement) ;*
(*iii*) *si* $\ell = 1$*, on ne peut conclure.*

Preuve.
$\boxed{\ell < 1}$ Soit $q \in]\ell, 1[$; alors $u_n = \mathrm{O}(q^n)$ et la série $\sum u_n$ converge.
$\boxed{\ell > 1}$ Soit $q \in]1, \ell[$; alors $q^n = \mathrm{O}(u_n)$ et $u_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui montre que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
$\boxed{\ell = 1}$ La série $\sum 1/n$ est divergente et la série $\sum 1/\big(n(n+1)\big)$ est convergente alors que u_{n+1}/u_n tend vers 1 dans les deux cas. cqfd

4.6 Comparaison à une série de Riemann

Définition 4.3 (Série de Riemann).
Les séries de Riemann sont les séries $\sum n^{-\alpha}$ où α est un nombre réel.

Théorème 4.9 (Nature des séries de Riemann). *La série* $\sum n^{-\alpha}$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$ *; si* $\alpha \leqslant 0$*, la série* $\sum n^{-\alpha}$ *diverge (grossièrement).*

Preuve.
$\boxed{\alpha \leqslant 0}$ La suite $(n^{-\alpha})_n$ ne tend pas vers 0 ; ainsi, la série $\sum n^{-\alpha}$ diverge (grossièrement).
$\boxed{\alpha > 0}$ La fonction $f : t \in]0, +\infty[\mapsto t^{-\alpha}$ est décroissante ce qui entraîne les inégalités :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ et } \forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

Par sommation, on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

Pour $\alpha < 1$, l'inéquation (4.3) s'écrit :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \tag{4.4}$$

Puisque $(n+1)^{1-\alpha}$ tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$ tend vers $+\infty$, la série $\sum n^{-\alpha}$ est divergente et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Pour $\alpha = 1$, l'inéquation (4.3) devient :

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n \tag{4.5}$$

la somme partielle $\sum_{k=1}^n k^{-1}$ tend vers $+\infty$, la série $\sum 1/n$ est divergente et $\sum_{k=1}^n 1/k \underset{n}{\sim} \ln n$.
Pour $\alpha > 1$, l'inéquation (4.3) s'écrit :

$$\frac{1 - (n+1)^{-(\alpha-1)}}{\alpha - 1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1 - n^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} \tag{4.6}$$

Puisque la suite des sommes des partielles est bornée, la série $\sum n^{-\alpha}$ est convergente. cqfd

Remarque. Le critère de D'Alembert ne permet pas de donner la nature des séries de Riemann car $u_{n+1}/u_n = n^\alpha/(n+1)^\alpha$ a pour limite 1 pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

5 Série absolument convergente

Voici arrivée l'étude des séries à termes complexes ou à termes réels qui ne sont pas de signe constant, par exemple $\sum n^{-2}\exp(in)$, $\sum(-1)^n n^{-2/3}$ ...

5.1 L'absolue convergence, qu'est-ce ?

Définition 5.1 (Série absolument convergente).
La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si, et seulement si, la série $\sum|u_n|$ est convergente.

Théorème 5.1 (Convergence des séries absolument convergentes).
Toute série absolument convergente est convergente et on a la majoration :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|}$$

La réciproque est fausse.

Preuve. La convergence de $\sum u_n$ se montre en utilisant le critère de Cauchy pour les séries :

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2, \quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \leqslant \varepsilon \text{ pour } n \geqslant N_\varepsilon \tag{5.1}$$

car la série $\sum |u_n|$ est convergente et vérifie le critère de Cauchy ; la série $\sum u_n$ converge donc.

En passant à la limite sur p dans l'inégalité $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$, on obtient, puisque les deux limites **existent**, l'inégalité demandée.

La série $\sum(-1)^n/(n+1)$ converge (sa somme vaut $\ln 2$) et la série des valeurs absolues $\sum 1/(n+1)$ est divergente. cqfd

5.2 Utilisation de O et o

Théorème 5.2 (Utilisation de O).
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ est une série absolument *convergente, alors $\sum u_n$ est une série absolument convergente.*

Preuve. Puisque $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, il existe $M > 0$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $n > N$, $|u_n| \leqslant M|v_n|$. La convergence de $\sum M|v_n|$ implique, par le théorème de comparaison, la convergence de la série $\sum|u_n|$. cqfd

Corollaire (Utilisation de o).
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum v_n$ est une série absolument convergente, alors $\sum u_n$ est une série absolument convergente.

5.3 Règle des équivalents

Théorème 5.3 (Règle des équivalents).
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. Si $u_n \underset{n}{\sim} v_n$ et si $\sum v_n$ est une série absolument *convergente, alors $\sum u_n$ est une série absolument convergente.*

Preuve. Puisque $u_n \underset{n}{\sim} v_n$, $|u_n| \underset{n}{\sim} |v_n|$ et la règle des équivalents pour les séries à termes positifs permet de conclure. cqfd

Remarque. La règle des équivalents est **fausse** si on suppose seulement la convergence de la série $\sum u_n$ sans en supposer l'absolue convergence.

5.4 Règle de D'Alembert

Théorème 5.4 (Règle de D'Alembert).
Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes non nuls tels que $\ell = \lim_n |u_{n+1}/u_n|$ existe dans $\overline{\mathbf{R}_+} = [0, +\infty]$;

(i) *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente ;*
(ii) *si $\ell > 1$, $|u_n|$ tend vers $+\infty$ et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;*
(iii) *si $\ell = 1$, on ne peut conclure.*

Preuve. Voir les séries à termes positifs. cqfd

5.5 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 5.2 (Produit de convolution, ou de Cauchy, de deux séries).
On appelle *produit de convolution* ou *produit de Cauchy* des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, la série $\sum w_n$ où l'on a posé :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q$$

Théorème 5.5 (Produit de convolution de deux séries absolument convergentes).
Le produit de convolution $\sum w_n$ des deux séries absolument convergentes $\sum u_p$ et $\sum v_q$ est une série absolument convergente et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p+q=n} u_p v_q\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q\Big) = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\Big)}$$

Preuve. On pose :
- $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$;
- $U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$, $V = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ et $W = \sum_{k=0}^{\infty} w_k$;
- $D_n = \{(p,q) \in \mathbf{N}^2 \ / \ 0 \leqslant p \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant q \leqslant n\}$ et $E_n = \{(p,q) \in \mathbf{N}^2 \ / \ p+q \leqslant n\}$.

On peut donc écrire :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k} u_p v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q \tag{5.2}$$

$$U_n V_n = \Big(\sum_{p=0}^{n} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n} v_q\Big) = \sum_{(p,q)\in D_n} u_p v_q \tag{5.3}$$

Cas des séries à termes positifs. Les inclusions $D_n \subset E_n \subset D_{2n}$ et la positivité des u_k et v_k, montrent que :

$$\sum_{(p,q)\in D_n} u_p v_q \leqslant \sum_{(p,q)\in E_n} u_p v_q \leqslant \sum_{(p,q)\in D_{2n}} u_p v_q \tag{5.4}$$

ce qui donne les inégalités : $U_n V_n \leqslant W_n \leqslant U_{2n} V_{2n}$, et, par encadrement, on obtient $W = UV$.

Cas général. On applique le résultat précédent aux séries $\sum |u_p|$ et $\sum |v_q|$, ce qui montre la convergence de la série de terme général $\sum_{p+q=n} |u_p\,|v_q|$, donc la convergence absolue de la série $\sum w_n$ puisque $|w_n| = |\sum_{p+q=n} u_p v_q| \leqslant \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$.
La démonstration précédente montre aussi que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|\Big) = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} |u_p|\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty} |v_q|\Big)$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|U_n V_n - W_n\right| &= \left|\sum_{(p,q)\in D_n\setminus E_n} u_p v_q\right| \\
&\leqslant \sum_{(p,q)\in D_n\setminus E_n} |u_p|\,|v_q| \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q| - \sum_{p=0}^{n}|u_p|\sum_{q=0}^{n}|v_q| \xrightarrow[n]{} 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

cqfd

Définition 5.3 (La fonction exponentielle).
Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose :

$$\boxed{\exp z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

Théorème 5.6 (Égalité fonctionnelle de l'exponentielle).
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{C}$ *et :*

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbf{C}^2,\ \exp(a+b) = \exp a \times \exp b}$$

Preuve. Le critère de D'Alembert montre que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbf{C}$, et :

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{p+q=n} \frac{a^p}{p!}\frac{b^q}{q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} a^p b^q \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n} \mathsf{C}_n^p a^p b^q = \frac{1}{n!}(a+b)^n
\end{aligned} \tag{5.6}$$

ce qui donne le résultat demandé à l'aide du produit de convolution. cqfd

6 Série alternée

6.1 L'alternance, qu'est-ce ?

Définition 6.1 (Série alternée).
Une série à termes réels $\sum u_n$ est une *série alternée* si, et seulement si, son terme général vérifie :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$$

Exemple 6.1. $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ est une série alternée, et $\sum (\cos n) n^{-\alpha}$ n'en est pas une.

6.2 Critère spécial de convergence

Théorème 6.1 (Critère spécial des séries alternées).
Soit $\sum u_n$ *une série alternée telle que la suite* $(|u_n|)_n$ *converge vers 0 en* ***décroissant*** *; alors,*

(i) *la série* $\sum u_n$ *converge ;*
(ii) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|\sum_{k\geqslant n} u_k\right| \leqslant |u_n|$ *et* $\sum_{k\geqslant n} u_k$ *est du signe de* u_n.

Preuve. On suppose que $u_n = (-1)^n |u_n|$, l'autre cas se traite de la même manière.

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$; pour tout $p \in \mathbf{N}$, on peut écrire :

$$S_{2p+2} - S_{2p} = u_{2p+2} + u_{2p+1} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+1}| \leqslant 0 \tag{6.1}$$

$$S_{2p+3} - S_{2p+1} = u_{2p+3} + u_{2p+2} = -|u_{2p+3}| + |u_{2p+2}| \geqslant 0 \tag{6.2}$$

$$S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} = -|u_{2p+1}| \underset{p}{\longrightarrow} 0 \tag{6.3}$$

Les suites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes ; elles convergent vers la même limite, ce qui montre que la suite $(S_n)_n$ est convergente, et on a l'encadrement suivant quitte à poser $S_{-1} = 0$:

$$\forall p \in \mathbf{N},\ S_{2p-1} \leqslant S_{2p+1} \leqslant S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leqslant S_{2p} \tag{6.4}$$

ce qui donne :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_{2p-1} = \sum_{k=2n}^{\infty} u_k \leqslant S_{2p} - S_{2p-1} = u_{2p} = |u_{2p}| \tag{6.5}$$

$$S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} = -|u_{2p+1}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_{2p} = \sum_{k=2p+1}^{\infty} u_k \leqslant 0 \tag{6.6}$$

cqfd

6.3 Les séries alternées de Riemann

Théorème 6.2 (Nature des séries alternées de Riemann).
La série $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ diverge (grossièrement) pour $\alpha \leqslant 0$ et converge pour $\alpha > 0$.

Preuve. Application immédiate du critère spécial des séries alternées. cqfd

Remarque. On suppose que $u_n = (-1)^n n^{-\alpha} + v_n + \mathrm{o}(v_n)$ pour un $\alpha > 0$.

(*i*) Si la série $\sum v_n$ est à termes positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature car la série $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ est convergente et

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = v_n + \mathrm{o}(v_n) \underset{n}{\sim} v_n \geqslant 0$$

(*ii*) Si la série $\sum v_n$ est absolument convergente, la série $\sum u_n$ est convergente, car $|v_n + \mathrm{o}(v_n)| \underset{n}{\sim} |v_n|$ montre que la série $\sum (v_n + \mathrm{o}(v_n))$ est absolument convergente et $\sum u_n$ est une combinaison linéaire de séries convergentes.

Exemple 6.2. Pour $\alpha > 0$ et $n > 1$, on pose $u_n = \ln\bigl(1 + (-1)^n n^{-\alpha}\bigr)$.

(*i*) Si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente puisque $u_n \underset{n}{\sim} (-1)^n n^{-\alpha}$.

(*ii*) Si $0 < \alpha \leqslant 1$, un développement limité à la précision $n^{-2\alpha}$ donne

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

ce qui montre que $u_n - (-1)^n n^{-\alpha} \underset{n}{\sim} -\frac{1}{2} n^{-2\alpha}$. La règle des équivalents pour les séries à termes de signe constant montre que $\sum (u_n - (-1)^n n^{-\alpha})$ converge si, et seulement si, $2\alpha > 1$ et puisque $\sum (-1)^n n^{-\alpha}$ converge, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$.

En résumé, la série $\sum \ln\bigl(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\bigr)$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Remarque. La série $\sum \ln\bigl(1 + (-1)^n/\sqrt{n}\bigr)$ est une série divergente alors que la série $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$ est convergente. La règle des équivalents est mise en défaut pour les séries qui ne sont pas à termes réels et de signe constant.

7 Transformation suite-série

7.1 Le principe

Comment fabriquer des séries télescopiques ?
À la suite $(x_n)_n$, on fait correspondre la série $\sum u_n$ par les relations :

$$u_0 = x_0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ u_n = x_n - x_{n-1}$$

Proposition 7.1. *La suite $(x_n)_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum u_n = \sum(x_n - x_{n-1})$ est convergente ; dans ce cas, on a :*

$$\lim_n x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$$

PREUVE. L'égalité $x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k$ donne le résultat. cqfd

Ainsi la **suite** $(\mathbf{x_n})_\mathbf{n}$ est de même nature que la **série** $\sum(\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}})$.

7.2 La constante d'Euler γ

On veut montrer la convergence de la suite $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n$; on lui associe la série $\sum u_n$ par les formules :

$$u_1 = x_1 = 1 \tag{7.1}$$

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n - \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \tag{7.2}$$

Un développement limité à la précision n^{-2} donne l'équivalent : $u_n \underset{n}{\sim} -1/(2n^2)$ ce qui montre la convergence de la série $\sum u_n$ et donc la convergence de la suite $(x_n)_n$ et

$$\gamma = \lim_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\ln\frac{1}{1-1/n} - \frac{1}{n}\Big) = 0{,}577\,215\,664\,9\ldots$$

On peut écrire :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)}$$

7.3 La formule de Stirling

On veut montrer que la suite $x_n = n!\,n^{-(n+\frac{1}{2})}e^n$ admet une limite finie $\ell > 0$. On pose $y_n = \ln x_n = \ln n! - (n+1/2)\ln n + n$ et pour $n > 1$, $u_n = y_n - y_{n-1}$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \Big(n - \frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \\ &= 1 + \Big(n - \frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\big(\frac{1}{n^3}\big)\Big) \\ &= 1 + \Big(-1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\Big) + \Big(\frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\Big) + \mathrm{o}\Big(\Big)\frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ce développement limité montre que $u_n \underset{n}{\sim} -1/(12n^2)$; la série $\sum u_n$ converge, la suite $(y_n)_n$ admet une limite λ et $x_n = e^{y_n}$ tend vers $\ell = e^\lambda > 0$. On démontre que $\ell = \sqrt{2\pi}$.

$$\boxed{n! \underset{n}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$$

8 Développement décimal d'un nombre réel

Comment justifier que $\frac{1}{3} = 0,333\,333\,3\ldots3\ldots$? C'est l'objet de ce paragraphe.

Proposition 8.1. *Tout nombre réel $x > 0$ s'écrit de manière unique*

$$x = 10^{n_0}x_0 \text{ avec } n_0 \in \mathbf{Z} \text{ et } x_0 \in [1, 10[.$$

Preuve. La suite $(10^n x)_{n\in\mathbf{Z}}$ est strictement croissante ; elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et vers 0 quand n tend vers $-\infty$. La famille des intervalles $([10^n, 10^{n+1}[)_{n\in\mathbf{Z}}$ constitue une partition de $]0, +\infty[$, ce qui montre l'existence d'un unique $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in [10^{n_0}, 10^{n_0+1}[$ et $x_0 = x10^{-n_0}$. cqfd

Lemme 8.2. *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, $9\sum_{k>m} 10^{-k} = 10^{-m}$*

Preuve. $9\displaystyle\sum_{k>m} 10^{-k} = 9\frac{10^{-(m+1)}}{1-10^{-1}} = 10^{-m}$ cqfd

Théorème 8.3. *Tout nombre réel $x \in [1, 10[$ s'écrit de manière unique*

$$x = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}$$

avec $(d_k)_k$ une suite de $[\![0, 9]\!]$ qui ne stationne pas en 9 et $d_0 \neq 0$.

Preuve. *Unicité.* Deux décompositions donnent par différence $0 = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}$ avec $d_k \in [\![-9, 9]\!]$. Soit m le premier entier tel que $d_m \neq 0$; alors

$$\begin{aligned} 10^{-m} \leqslant |-d_m 10^{-m}| = |\sum_{k=m+1}^{\infty} d_k 10^{-k}| \\ \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |d_k| 10^{-k} < \sum_{k=m+1}^{\infty} 9\,10^{-k} = 10^{-m} \end{aligned} \tag{8.1}$$

ce qui contradictoire, l'inégalité étant stricte puisque la suite $(d_k)_k$ n'est pas stationnaire en la valeur 9.

Existence. Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose $a_p = 10^{-p}\,\mathrm{Ent}(10^p x)$ où Ent désigne la partie entière. On a donc $a_p \leqslant y < a_p + 10^{-p}$ ce qui assure la convergence de la suite $(a_p)_p$ vers x.

L'inégalité précédente peut encore s'écrire

$$10^{p+1}a_p \leqslant 10^{p+1}x < 10^{p+1}a_p + 10 \tag{8.2}$$

et, comme $10^{p+1}a_p \in \mathbf{N}$,

$$10^{p+1}a_p \leqslant \mathrm{Ent}(10^{p+1}y) = 10^{p+1}a_{p+1} < 10^{p+1}a_p + 10 \tag{8.3}$$

ce qui montre que

$$\forall p \in \mathbf{N},\ 10^{p+1}(a_{p+1} - a_p) \in [0, 10[\cap \mathbf{N} = [\![0, 9]\!] \tag{8.4}$$

On pose $d_0 = a_0 = \mathrm{Ent}(y) \in [\![1, 9]\!]$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$, $d_{p+1} = 10^{p+1}(a_{p+1} - a_p) \in [\![0, 9]\!]$. La transformation suite-série montre que

$$\forall p \in \mathbf{N},\ a_p = a_0 + \sum_{k=1}^{p}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k} \tag{8.5}$$

et donc

$$x = \lim_p a_p = \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$$

Si la suite $(d_k)_k$ stationne en 9, il existe un rang p tel que $\forall k > p$, $d_k = 9$ et

$$x - a_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} d_k 10^{-k} = \sum_{k=p+1}^{\infty} 9\, 10^{-k} = 10^{-p}$$

ce qui contredit (8.2). cqfd

Remarque. Ce qui vient d'être fait avec 10, peut être fait avec tout entier $a > 1$, en particulier en prenant $a = 2^p$ ce qui est utilisé pour la représentation des nombres en machine.

Chapitre 5

Continuité en dimension finie

Sommaire

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension *finie* muni d'une norme notée $\| \ \|$.

1 Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

1.1 Parties ouvertes, parties fermées

Définition 1.1 (Partie ouverte, partie fermée).
Une partie O de E est dite *ouverte* si, et seulement si, O est la partie vide ou si tout point de O est centre d'une boule ouverte (non vide) contenue dans O.

$$O \text{ est une partie ouverte } \iff \forall \mathbf{x} \in O,\ \exists r > 0,\ \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset O$$

Une partie F de E est dite *fermée* si, et seulement si, son complémentaire (dans E) est une partie ouverte.

Remarque. Ces notions sont indépendantes de la norme choisie sur E ; en effet, si $\mathcal{N}$ est une autre norme sur E, il existe deux nombres strictement positifs α et β tels que $\alpha\mathcal{N} \leqslant \| \ \| \leqslant \beta\mathcal{N}$, ce qui implique les inclusions :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}, \frac{r}{\beta}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{a}, r) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}, \frac{r}{\alpha})$$

Proposition 1.1 (Exemples de parties ouvertes et de parties fermées).
$\emptyset$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées ; toute boule ouverte est une partie ouverte ; toute boule fermée est une partie fermée.

Preuve. Que $\emptyset$ et E soient à la fois des parties ouvertes et fermées est évident, mais bizarre.
Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$; alors $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) \subset \mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ (faire un dessin), car

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}, r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \implies \\ &\qquad \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a})\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{x} \notin \mathcal{B}_f(\mathbf{a}, r)$; alors $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| - r) \subset \complement\mathcal{B}_f(\mathbf{a}, r)$ (faire un dessin), car

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| - r) \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| - r \implies \\ &\qquad \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) \geqslant \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| - \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| > \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| - (\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| - r) = r \end{aligned}$$

cqfd

1.2 Réunion et intersection

Proposition 1.2 (Réunion et intersection de parties ouverts et de parties fermées).
Toute réunion de parties ouvertes est une partie ouverte ; toute intersection d'un nombre fini *de parties ouvertes est une partie ouverte.*

Toute intersection de parties fermées est une partie fermée ; toute réunion d'un nombre fini de parties fermées est une partie fermée.

Preuve.
Soient $(O_i)_{i \in I}$ une famille de parties ouvertes et $x \in \cup_{i \in I} O_i$; il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $\mathbf{x} \in I_{i_0}$ et puisque O_{i_0} est une partie ouverte, il existe $r_0 > 0$ tel que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r_0) \subset O_{i_0} \subset \cup_{i \in I} O_i$.
Soit $(O_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille *finie* de parties ouvertes ; alors

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{x} \in O_i \implies \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists r_i > 0,\ \mathcal{B}(\mathbf{x}, r_i) \subset O_i$$

En posant $r = \min\{r_i \,/\, i \in [\![1, n]\!]\}$, r est un nombre réel strictement positif, et on obtient $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}, r_i) \subset O_i$ pour tout i ; ainsi $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$.

La démonstration se fait par passage au complémentaire en utilisant les relations :

$$\complement\Big(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} \complement F_i \qquad \complement\Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \complement F_i \tag{1.1}$$

cqfd

1.3 Points adhérents, points intérieurs

Définition 1.2 (Point adhérent).
Un élément $\mathbf{a} \in E$ est dit *adhérent* à la partie A si, et seulement si, toute boule ouverte de centre $\mathbf{a}$ rencontre A.

Définition 1.3 (Point intérieur).
Un élément $\mathbf{a} \in E$ est dit *intérieur* à la partie A si, et seulement si, il existe une boule ouverte de centre $\mathbf{a}$ contenue dans A.

Définition 1.4 (Voisinage d'un point).
Une partie A de E est appelée *voisinage du point* $\mathbf{a}$ si, et seulement si, $\mathbf{a}$ est un point intérieur à A.

Proposition 1.3 (Exemples de points adhérent et intérieur).

(i) *Tout point de A est adhérent à A ; tout point intérieur à A appartient à A.*
(ii) $\mathbf{a}$ *est adhérent à A si, et seulement si,* $\mathbf{a}$ *n'est pas intérieur à $\complement A$;*
(iii) *Soit O une partie ouverte ; alors* $\mathbf{a}$ *est intérieur à O si, et seulement si,* $\mathbf{a}$ *appartient à O,* i.e. *O est une partie ouverte si, et seulement si, O contient tous ses points intérieurs.*
(iv) *Soit F une partie fermée ; alors* $\mathbf{a}$ *est adhérent à F si, et seulement si,* $\mathbf{a}$ *appartient à F,* i.e. *F est une partie fermée si, et seulement si, F contient tous ses points adhérents.*

Preuve.

(i) Il suffit de remarquer que le centre d'une boule appartient à cette boule.

(ii) $\mathbf{a}$ est adhérent à A ssi $\forall r > 0$, $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ rencontre A, si, et seulement si, $\forall r > 0$, $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ n'est pas contenue dans le complémentaire de A, si, et seulement si, $\mathbf{a}$ n'est pas intérieur à $\complement A$.

(iii) $\mathbf{a}$ est adhérent à A si, et seulement si, $\forall r > 0$, $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ rencontre A si, et seulement si, $\forall r > 0$, $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$ n'est pas contenue dans le complémentaire de A si, et seulement si, $\mathbf{a}$ n'est pas intérieur à $\complement A$.

(iv) Par passage au complémentaire et contraposée.

(v) Simple.

(vi) Par passage au complémentaire.

cqfd

1.4 Caractérisation séquentielle

Théorème 1.4 (Caractérisation séquentielle des points adhérents). *Soit A une partie de E ; alors* $\mathbf{a}$ *est adhérent à A si, et seulement si,* $\mathbf{a}$ *est limite d'une suite d'éléments de A.*

Preuve.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\mathbf{a}$ est adhérent à A si, et seulement si, $\forall r > 0$, $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r) \cap A$ n'est pas vide, donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists \mathbf{u}_n \in \mathcal{B}(\mathbf{a}, \frac{1}{n+1}) \cap A$ et $(\mathbf{u}_n)_n$ est une suite de A telle que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| < \frac{1}{n+1}$ donc de limite $\mathbf{a}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de limite $\mathbf{a}$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| < \varepsilon$, *i.e.* à partir duquel $\mathbf{u}_n \in \mathcal{B}(\mathbf{a}, \varepsilon)$, ce qui montre que $A \cap \mathcal{B}(\mathbf{a}, \varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$. cqfd

Exemple 1.1. Si A est une partie bornée de $\mathbf{R}$, $\sup A$ et $\inf A$ sont deux points adhérents à A.

Théorème 1.5 (Caractérisation séquentielle des points intérieurs).
Soit A une partie de E ; alors $\mathbf{a}$ *est un point intérieur à A si, et seulement si, toute suite de E qui converge vers* $\mathbf{a}$ *est à valeurs dans A à partir d'un certain rang.*

Preuve. Par passage au complémentaire et contraposée : $\mathbf{a}$ est intérieur à A si, et seulement si, $\mathbf{a}$ n'est pas adhérent à $\complement A$ si, et seulement si, toute suite de E de limite $\mathbf{a}$ est à valeurs dans A à partir d'un certain rang. cqfd

Théorème 1.6 (Caractérisation séquentielle des parties fermées).
Une partie F de E est fermée si, et seulement si, toute suite convergente à valeurs dans F a sa limite dans F.

Preuve.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de F de limite $\mathbf{a}$; alors, $\mathbf{a}$ est adhérent à F et appartient à F puisque F est fermé.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\mathbf{a}$ un point adhérent à F ; il existe une suite de F de limite $\mathbf{a}$, donc $\mathbf{a} \in F$ et F est une partie fermée. cqfd

2 Limite d'une application

On considère dans cette section deux espaces vectoriels normés $(E, \| \ \|)$ et $(F, \mathcal{N})$. Si A est une partie de E, l'ensemble des applications de A vers F est noté $\mathcal{F}(A, F)$.

2.1 Limite d'une application en un point

Définition 2.1 (Limite d'une application en un point).
Soient $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, F)$ et $\mathbf{a}$ un point adhérent à A ; on dit que $\mathbf{f}$ *admet* $\mathbf{b}$, un élément de F, *comme limite au point* $\mathbf{a}$ si, et seulement si,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\big) < \varepsilon}$$

Théorème 2.1 (Unicité de la limite). *Le vecteur* $\mathbf{b}$ *de la définition précédente est unique ; on le note*

$$\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in A}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \ \textit{ou}\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x} \to \mathbf{a}}{\longrightarrow} \mathbf{b}$$

On dit alors que $\mathbf{f}$ admet une limite au point $\mathbf{a}$.

Preuve. On suppose l'existence de deux vecteurs $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ de F vérifiant la définition ; alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (\eta_1, \eta_2) \in {\mathbf{R}_+^*}^2,\ \forall x \in A, \begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta_1 & \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\big) < \varepsilon \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta_2 & \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\big) < \varepsilon \end{cases} \tag{2.1}$$

ainsi, $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \min(\eta_1, \eta_2) \implies \mathcal{N}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \leqslant \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1\big) + \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2\big) < 2\varepsilon$ ce qui montre que $\mathcal{N}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = 0$, *i.e.* $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$. cqfd

Remarques. Si $\mathbf{a} \in A$ et si $\mathbf{f}$ admet $\mathbf{b}$ pour limite en $\mathbf{a}$, alors $\mathbf{b}$ vaut nécessairement $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.
L'existence d'une limite pour $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ ne dépend pas des normes choisies sur E et F.

2.2 Limite et coordonnées

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_q)$ une base de F ; pour $\mathbf{x} \in A$, on pose

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{q} f_k(\mathbf{x})\, \mathbf{e}_k \tag{2.2}$$

À $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, F)$, on fait correspondre p fonctions numériques $f_k \in \mathcal{F}(A, \mathbf{K})$, ce sont les fonctions coordonnées de $\mathbf{f}$ relatives à la base $\mathcal{B}$.

Par exemple, si $F = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est une matrice de taille $n \times p$ et les np fonctions coordonnées relatives à la base canonique sont les coefficients de cette matrice.

Théorème 2.2 (Caractérisation de la limite à l'aide des composantes).
$\mathbf{f}$ *admet une limite en* $\mathbf{a}$ *si, et seulement si, pour tout* $k \in [\![1, q]\!]$, f_k *admet une limite en* $\mathbf{a}$, *et dans ce cas :*

$$\lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^{q} (\lim_{\mathbf{a}} f_k)\, \mathbf{e}_k$$

Preuve. Puisque la notion de limite est indépendante de la norme choisie, on utilise sur F une norme adaptée à la base $\mathcal{B}$, par exemple $\mathcal{N}_\infty(\mathbf{y}) = \sup\{|y_k| \ / \ j \in [\![1, q]\!]\}$ où les y_k sont les composantes de $\mathbf{y}$ dans la base $\mathcal{B}$. Si $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^{q} b_j \mathbf{e}_k$, on a :

$$\mathcal{N}_\infty\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\big) = \sup_k \{|f_k(\mathbf{x}) - b_k|\} < \varepsilon \iff \forall k \in [\![1, q]\!],\ |f_k(\mathbf{x}) - b_k| < \varepsilon \tag{2.3}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{a}}{\longrightarrow} \mathbf{b} \iff \forall k \in [\![1, q]\!],\ f_k(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{a}}{\longrightarrow} b_k \tag{2.4}$$

cqfd

Corollaire (Cas des fonctions complexes). *Soit* $f : A \to \mathbf{C}$ *;* f *admet une limite en* $\mathbf{a}$ *si, et seulement si,* $\Re\mathrm{e}(f)$ *et* $\Im\mathrm{m}(f)$ *admettent une limite en* $\mathbf{a}$ *et dans ce cas :*

$$\lim_{\mathbf{a}} f = \lim_{\mathbf{a}} \Re\mathrm{e}(f) + i \lim_{\mathbf{a}} \Im\mathrm{m}(f)$$

2.3 Limite et suites

Théorème 2.3 (Caractérisation séquentielle des limites).
Soient $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, F)$ *et* $\mathbf{a}$ *un point de* E *adhérent à* A *;*

(i) *si* $\mathbf{f}$ *admet une limite en* $\mathbf{a}$, *alors pour toute suite* $(\mathbf{x}_n)_n$ *de* A *de limite* $\mathbf{a}$, *la suite* $\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\big)_n$ *converge vers* $\lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f}$ *;*

(ii) *si l'image par* $\mathbf{f}$ *de toute suite d'éléments de* A *convergeant vers* $\mathbf{a}$ *est une suite convergente, alors* $\mathbf{f}$ *admet une limite en* $\mathbf{a}$, *limite commune de toutes ces suites.*

Preuve.

(i) Soient $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f}$ et $(\mathbf{x}_n)_n$ une suite de A de limite $\mathbf{a}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta$ implique $\mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\big) < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbf{N}$ le rang à partir duquel $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \eta$; ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n > N \implies \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \eta \text{ et } \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{b}\big) < \varepsilon \tag{2.5}$$

ce qui montre que $\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{a} \implies \lim_n \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f}$

(ii) Soient $(\mathbf{x}_n)_n$ et $(\mathbf{y}_n)_n$ deux suites de A de limite $\mathbf{a}$, telles que les suites $\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\big)_n$ et $\big(\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)\big)_n$ soient convergentes ; alors la suite $(\mathbf{z}_n)_n$ définie par $\mathbf{z}_{2p} = \mathbf{x}_p$ et $\mathbf{z}_{2p+1} = \mathbf{y}_p$ converge vers $\mathbf{a}$ et donc, par hypothèse, la suite $\big(\mathbf{f}(\mathbf{z}_n)\big)_n$ converge et

$$\begin{aligned} \lim_n \mathbf{f}(\mathbf{z}_n) &= \lim_p \mathbf{f}(\mathbf{z}_{2p}) = \lim_p \mathbf{f}(\mathbf{x}_p) \\ &= \lim_p \mathbf{f}(\mathbf{z}_{2p+1}) = \lim_p \mathbf{f}(\mathbf{y}_p) \end{aligned} \tag{2.6}$$

ce qui montre que les images par $\mathbf{f}$ de toutes les suites de limite $\mathbf{a}$ ont une limite commune, limite que l'on note $\mathbf{b}$.

Supposons que $\mathbf{f}$ n'admette pas $\mathbf{b}$ pour limite en $\mathbf{a}$; alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists \mathbf{x} \in A,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \text{ et } \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\big) \geqslant \varepsilon \tag{2.7}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbf{N},\ \exists \mathbf{x}_n \in A,\ \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \frac{1}{n+1} \text{ et } \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{b}\big) \geqslant \varepsilon \tag{2.8}$$

Ainsi est construite une suite $(\mathbf{x}_n)_n$ d'éléments de A, de limite $\mathbf{a}$ et dont l'image par $\mathbf{f}$ n'admet pas $\mathbf{b}$ pour limite, ce qui est contradictoire.

cqfd

Exemple 2.1. L'application $f : (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \mapsto \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ n'a pas de limite en $\mathbf{0}$.

2.4 Extension de la notion de limite

Définition 2.2 (Limite infinie). On dit que la fonction *réelle* f admet $+\infty$ pour limite en $\mathbf{a}$ si, et seulement si,

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \implies f(\mathbf{x}) > M$$

On écrit alors $\lim_{\mathbf{a}} f = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = +\infty$ ou $f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}{\longrightarrow} +\infty$.

De même, f admet $-\infty$ pour limite en $\mathbf{a}$ si, et seulement si,

$$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \implies f(\mathbf{x}) < M$$

Définition 2.3 (Limite à l'infini). Soit $\mathbf{f}$ une application d'un intervalle non majoré $I \subset \mathbf{R}$ à valeurs dans F ; on dit que $\mathbf{f}$ admet $\mathbf{b}$ pour limite en $+\infty$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x \in I,\ x > M \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(x) - \mathbf{b}\big) < \varepsilon$$

On écrit alors $\lim_{+\infty} \mathbf{f} = \lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = \mathbf{b}$ ou $\mathbf{f}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{b}$.

Si I est maintenant un intervalle non minoré, $\mathbf{f}$ admet $\mathbf{b}$ pour limite en $-\infty$, si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M < 0,\ \forall x \in I,\ x < M \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(x) - \mathbf{b}\big) < \varepsilon$$

Remarque. Le théorème de caractérisation séquentielle s'étend sans difficulté dans ces cas. On a par exemple : f admet $+\infty$ pour limite en $\mathbf{a}$ si, et seulement si, l'image par f de toute suite d'éléments de A convergeant vers $\mathbf{a}$, a pour limite $+\infty$.

De même s'étend sans difficulté la caractérisation à l'aide des coordonnées.

2.5 Opérations algébriques

Proposition 2.4 (Combinaison linéaire).
Soit $\mathbf{a}$ *un point de* E *adhérent à* A *; le sous-ensemble des applications de* A *à valeurs dans* F *qui admettent une limite en* $\mathbf{a}$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel et* $\mathbf{f} \mapsto \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f}$ *est une application linéaire sur cet espace.*

PREUVE. On utilise la caractérisation séquentielle. Soient $(\mathbf{x}_n)_n$ une suite de A de limite $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ deux applications qui admettent une limite en $\mathbf{a}$, λ et μ deux scalaires ; alors

$$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})(\mathbf{x}_n) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mu\mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \underset{n}{\longrightarrow} \lambda \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f} + \mu \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{g} \tag{2.9}$$

Puisque $(\mathbf{x}_n)_n$ est une suite quelconque de limite $\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ admet une limite en $\mathbf{a}$ et

$$\lim_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}) = \lambda \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f} + \mu \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{g} \tag{2.10}$$

cqfd

Proposition 2.5 (Produit).
Soient f et g deux fonctions numériques qui admettent une limite en $\mathbf{a}$*, point adhérent à A ; alors le produit fg admet une limite en* $\mathbf{a}$ *et*

$$\lim_{\mathbf{a}} fg = \lim_{\mathbf{a}} f \; \lim_{\mathbf{a}} g$$

PREUVE. On utilise $(fg)(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_n)g(\mathbf{x}_n) \underset{n}{\longrightarrow} \lim_{\mathbf{a}} f \; \lim_{\mathbf{a}} g$ où $(\mathbf{x}_n)_n$ est une suite quelconque de A de limite $\mathbf{a}$. cqfd

Proposition 2.6 (Inverse).
Soit f une fonction numérique qui admet une limite non nulle *en* $\mathbf{a}$*, alors $\frac{1}{f}$ admet une limite en* $\mathbf{a}$ *et*

$$\lim_{\mathbf{a}} \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_{\mathbf{a}} f}$$

PREUVE. On utilise $(\frac{1}{f})(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{f(\mathbf{x}_n)} \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{lim_{\mathbf{a}} f}$ où $(\mathbf{x}_n)_n$ est une suite quelconque de A de limite $\mathbf{a}$. cqfd

Théorème 2.7 (Composition).
Soient $A \subset E$, $B \subset F$, $\mathbf{a}$ *un point de E adhérent à A,* $\mathbf{f}$ *une application de A vers B et* $\mathbf{g}$ *une application de B vers G.*

(*i*) *Si* $\mathbf{f}$ *admet* $\mathbf{b}$ *pour limite en* $\mathbf{a}$*, alors* $\mathbf{b}$ *est adhérent à B ;*
(*ii*) *si de plus,* $\mathbf{g}$ *admet* $\mathbf{c}$ *pour limite en* $\mathbf{b}$*, alors* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *admet* $\mathbf{c}$ *pour limite en* $\mathbf{a}$*.*

PREUVE.
(*i*) Soit $(\mathbf{x}_n)_n$ une suite de A de limite $\mathbf{a}$; alors $\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\big)_n$ est une suite de B de limite $\mathbf{b}$ qui est donc adhérent à B.
(*ii*) Soit $(\mathbf{x}_n)_n$ une suite quelconque de A de limite $\mathbf{a}$; alors $\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\big)_n$ est une suite de B de limite $\mathbf{b}$ et donc $\big(\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)\big)\big)_n$ est une suite de limite $\mathbf{c}$, ce qui montre que $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ admet $\mathbf{c}$ comme limite en $\mathbf{a}$. cqfd

2.6 Relations de comparaison

Soient A une partie de E, $\mathbf{a}$ un point adhérent à A, $\mathbf{f}$ une application de A vers F et φ une application de A dans $\mathbf{K}$. Dans la pratique, φ est une application à valeurs réelles positives.

Définition 2.4 (Domination). On dit que $\mathbf{f}$ est *dominée* par φ en $\mathbf{a}$ si, et seulement si,

$$\exists r > 0,\ \exists M > 0,\ \forall \mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\},\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) \leqslant M|\varphi(\mathbf{x})|$$

On écrit alors : $\mathbf{f} \underset{\mathbf{a}}{=} \mathrm{O}(\varphi)$

Si φ ne s'annule pas sur $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, on a

$$\mathbf{f} \underset{\mathbf{a}}{=} \mathrm{O}(\varphi) \iff \frac{1}{\varphi}\mathbf{f} \text{ est bornée au voisinage de } \mathbf{a} \tag{2.11}$$

Définition 2.5 (Négligeabilité). On dit que $\mathbf{f}$ est *négligeable* devant φ en $\mathbf{a}$ si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall \mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\},\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \implies \mathcal{N}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) \leqslant \varepsilon|\varphi(\mathbf{x})|$$

On écrit alors : $\mathbf{f} \underset{\mathbf{a}}{=} \mathrm{o}(\varphi)$

Si φ ne s'annule pas sur $A \setminus \{\mathbf{a}\}$, on a

$$\mathbf{f} \underset{\mathbf{a}}{=} \mathrm{o}(\varphi) \iff \frac{1}{\varphi}\mathbf{f} \text{ admet } \mathbf{0} \text{ pour limite en } \mathbf{a} \tag{2.12}$$

Exemple 2.2. Soit $f : x \mapsto \exp\bigl(-(x+iy)^2\bigr)$; alors :

$$\forall(\alpha, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x^{-\alpha})$$

car $|x^\alpha f(x)| = x^\alpha |\exp(-x^2 + y^2 - 2ixy)| = x^\alpha e^{-x^2} e^{y^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

3 Continuité

On considère deux espaces vectoriels normés $(E, \|\ \|)$ et $(F, \mathcal{N})$, A une partie de E et $\mathbf{f}$ une application de A à valeurs dans F.

3.1 Généralités

Définitions 3.1 (Continuité en un point, sur une partie).
Soit $\mathbf{a} \in A$; on dit que $\mathbf{f}$ est *continue* en $\mathbf{a}$ si, et seulement si, $\mathbf{f}$ admet une limite en $\mathbf{a}$; dans ce cas, cette limite est nécessairement $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Soit $B \subset A$; on dit que $\mathbf{f}$ est continue sur B si, et seulement si, $\mathbf{f}$ est continue en tout point de B.

On dit que $\mathbf{f}$ est continue (sans autre précision) si $\mathbf{f}$ est continue sur A.

Les applications continues sur A à valeurs dans F sont notées $\mathcal{C}(A, F)$ ou encore $\mathcal{C}^0(A, F)$.

3.2 Caractérisation de la continuité

Théorème 3.1 (Caractérisation de la continuité à l'aide des composantes).
Soient f_1, f_2,..., f_p les composantes de $\mathbf{f}$ relatives à une base donnée de F ; alors

(*i*) $\mathbf{f}$ *est continue en* $\mathbf{a}$ *si, et seulement si, toutes les applications f_j sont continues en* $\mathbf{a}$ *;*
(*ii*) $\mathbf{f}$ *est continue sur $B \subset A$ si, et seulement si, toutes les applications f_j sont continues sur B.*

Théorème 3.2 (Caractérisation de la continuité à l'aide de suites).
$\mathbf{f}$ *est continue en* $\mathbf{a}$ *si, et seulement si, l'image par* $\mathbf{f}$ *de toute suite d'éléments de A convergeant vers* $\mathbf{a}$ *est une suite convergente.*

Exemple 3.1. Une base étant fixée, l'application $j^{\text{ème}}$ coordonnée $\mathbf{x} \mapsto x_j$ est continue.

3.3 Continuité et applications lipschitziennes

Théorème 3.3 (Continuité des applications lipschitziennes).
Si $\mathbf{f}$ *est une application lipschitzienne sur A, alors* $\mathbf{f}$ *est continue sur A. La réciproque est fausse.*

Preuve. Soit k le rapport de Lipschitz de $\mathbf{f}$:

$$\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2,\ \mathcal{N}\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\bigr) \leqslant k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Alors

$$\forall\mathbf{a} \in A,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0,$$
$$\forall\mathbf{x} \in A,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant \eta \implies \mathcal{N}\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\bigr) \leqslant k\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant k\eta = \varepsilon \quad (3.1)$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne car

$$\sup_{x \neq y} \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = \sup_{x \neq y} \frac{1}{xy} = +\infty$$

cqfd

Remarque. Le lecteur attentif remarquera que dans le cas d'une application lipschitzienne le nombre $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ est indépendant du point $\mathbf{a} \in A$ considéré ; ce nombre ne dépend que de ε, et aussi de k, donc de $\mathbf{f}$.

3.4 Opérations algébriques

Proposition 3.4 (Restriction). *Si* $\mathbf{f}$ *est continue (sur* A*) et* $B \subset A$*, alors* $\mathbf{f}$ *est continue sur* B*.*

Proposition 3.5 (Prolongement). *Soit* $\mathbf{a} \in E \setminus A$ *adhérent à* A *;* $\mathbf{f}$ *admet un prolongement* $\tilde{\mathbf{f}}$ *continu à* $A \cup \{\mathbf{a}\}$ *si, et seulement si,* $\mathbf{f}$ *admet une limite en* $\mathbf{a}$*. Si c'est le cas, le prolongement est unique et* $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f}$*.*

Proposition 3.6 (Combinaison linéaire). *Soient* $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{g}$ *sont deux applications continues en* $\mathbf{a}$ *et* λ *et* μ *deux scalaires ; alors l'application* $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ *est continue en* $\mathbf{a}$*.*

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ *des applications continues de* A *vers* F *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*

Proposition 3.7 (Produit). *Soient* f *et* g *deux applications numériques (*i.e. *à valeurs dans* $\mathbf{K}$*) et continues en* $\mathbf{a}$ *; alors le produit* $f\,g$ *est continue en* $\mathbf{a}$*.*

L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ *des applications numériques continues sur* A *est une* $\mathbf{K}$*-algèbre.*

Proposition 3.8 (Inverse). *Soit* f *une application numérique continue en* $\mathbf{a}$ *telle que* $f(\mathbf{a}) \neq 0$ *; alors la fonction* $1/f$ *est définie sur un voisinage de* $\mathbf{a}$ *et est continue en* $\mathbf{a}$*.*

Proposition 3.9 (Composition). *Soient* $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(A, F)$ *et* $\mathbf{g} \in \mathcal{C}(B, G)$ *telles que* $\mathbf{f}$ *soit à valeurs dans* B *; alors* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *est continue sur* A*.*

Théorème 3.10 (Continuité des applications polynomiales).
Notons $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *les coordonnées de* $\mathbf{x}$ *dans une base donnée de* E *; alors toute application polynomiale en les coordonnées* x_j *est continue.*

Preuve. Les applications coordonnées sont continues ; les monômes sont continues (produit de fonctions continues) ; les applications polynomiales sont continues (combinaison linéaire d'applications continues). cqfd

Exemples 3.2.

$M \mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ car fonction polynomiale des coefficients m_{ij} de M.

$M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ (matrice des cofacteurs) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ car ses composantes, *i.e.* les coefficients de $\mathrm{Com}(M)$, sont polynomiales en les coefficients m_{ij} de M.

De même $M \mapsto {}^tMM$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

3.5 Image réciproque de parties ouverte et fermée

Définition 3.2 (Image réciproque d'une partie).
Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, F)$; pour toute partie $B \subset F$, on appelle *image réciproque* de B par $\mathbf{f}$ le sous-ensemble de A noté $\mathbf{f}^{<-1>}(B)$ et défini par :

$$\boxed{\mathbf{f}^{<-1>}(B) = \{\mathbf{x} \in A \,/\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B\}}$$

Attention à ne pas confondre l'image réciproque avec l'application réciproque qui est notée $\mathbf{f}^{-1}$.

Proposition 3.11 (Règles de calcul). *On a les égalités suivantes :*

$$\complement\big(\mathbf{f}^{<-1>}(B)\big) = \mathbf{f}^{<-1>}(\complement B)$$
$$\mathbf{f}^{<-1>}\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \mathbf{f}^{<-1>}(B_i)$$
$$\mathbf{f}^{<-1>}\Big(\bigcap_{i \in I} B_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \mathbf{f}^{<-1>}(B_i)$$

Preuve.

(i) $\mathbf{x} \in \complement\big(\mathbf{f}^{<-1>}(B)\big) \iff \mathbf{x} \notin \mathbf{f}^{<-1>}(B) \iff \mathbf{f}(\mathbf{x}) \notin B \iff \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \complement B \iff \mathbf{x} \in \mathbf{f}^{<-1>}(\complement B)$

(*ii*) $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{<-1>}\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) \iff \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \bigcup_{i\in I} B_i \iff \exists i_0 \in I,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_{i_0} \iff \exists i_0 \in I,\ \mathbf{x} \in \mathbf{f}^{<-1>}\big(B_{i_0}\big) \iff \mathbf{x} \in \bigcup_{i\in I} \mathbf{f}^{<-1>}(B_i)$

(*iii*) $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{<-1>}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) \iff \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \bigcap_{i\in I} B_i \iff \forall i \in I,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B_i \iff \forall i \in I,\ \mathbf{x} \in \mathbf{f}^{<-1>}(B_i) \iff \mathbf{x} \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{f}^{<-1>}(B_i)$

cqfd

Théorème 3.12 (Image réciproque d'ouverts et de fermés).
Soit $\mathbf{f}$ *une fonction* continue *de* E *vers* F *; alors*

(*i*) *l'image réciproque de toute partie fermée de* F *est une partie fermée de* E *;*
(*ii*) *l'image réciproque de toute partie ouverte de* F *est une partie ouverte de* E*.*

Preuve.

(*i*) Utilisation de la caractérisation séquentielle des fermés. Soient B une partie fermée de F et $(\mathbf{u}_n)_n$ une suite de $\mathbf{f}^{<-1>}(B)$ de limite $\mathbf{a}$; il s'agit de montrer que $\mathbf{a} \in \mathbf{f}^{<-1>}(B)$. Puisque $\mathbf{f}$ est continue, la suite $\big(\mathbf{f}(\mathbf{u}_n)\big)_n$ de B admet $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ pour limite et comme B est une partie fermée, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in B$.

(*ii*) Soit O une partie ouverte de F ; $B = \complement O$ est une partie fermée de F et $\mathbf{f}^{<-1>}(B) = \complement \mathbf{f}^{<-1>}(O)$, complémentaire d'une partie ouverte, est une partie fermée.

cqfd

Corollaire (Cas des fonctions réelles). *Soient* $f \in \mathcal{C}(E, \mathbf{R})$ *et* $\alpha \in \mathbf{R}$ *; alors :*

(*i*) *les parties* $\{\mathbf{x} \in E \;/\; f(\mathbf{x}) = \alpha\}$, $\{\mathbf{x} \in E \;/\; f(\mathbf{x}) \leqslant \alpha\}$, $\{\mathbf{x} \in E \;/\; f(\mathbf{x}) \geqslant \alpha\}$ *sont des parties fermées de* E *;*
(*ii*) *les parties* $\{\mathbf{x} \in E \;/\; f(\mathbf{x}) < \alpha\}$, $\{\mathbf{x} \in E \;/\; f(\mathbf{x}) > \alpha\}$ *sont des parties ouvertes de* E*.*

Preuve.

(*i*) $\{\alpha\}$, $[\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \alpha]$ sont des parties fermées de $\mathbf{R}$.

(*ii*) $]\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \alpha[$ sont des parties ouvertes de $\mathbf{R}$.

cqfd

Exemples 3.3. Ce corollaire est l'arme (presque) absolue pour démontrer que des parties sont ouvertes ou sont fermées.

$F : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ car polynomiale en x et y ; on en tire donc que :
– l'ellipse $(\mathcal{E}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;/\; F(x, y) = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^2$;
– l'intérieur de $(\mathcal{E})$, $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;/\; F(x, y) < 1\}$, est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$;
– l'extérieur de $(\mathcal{E})$, $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;/\; F(x, y) > 1\}$, est une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.

$\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ car image réciproque de la partie ouverte $\mathbf{K} \setminus \{0\}$ par l'application continue déterminant.

$O(n)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ car image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$.

4 Compacité

4.1 Généralités

Définition 4.1 (Partie compacte). Une partie A de E est dite *compacte* si, et seulement si, A est une partie fermée et bornée.

Remarques. Cette définition n'est valable que pour les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension *finie.*

La notion de compacité est indépendante de la norme choisie.

Exemples 4.1.

Les boules fermées sont des parties compactes ; les segments de $\mathbf{R}$ sont des parties compactes.

La sphère unité $\{\mathbf{x} \in E \;/\; \|\mathbf{x}\| = 1\}$ est une partie fermée, image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $\| \;\|$, et bornée ; c'est donc une partie compacte.

Les ellipses sont des parties compactes de $\mathbf{R}^2$; les hyperboles et les paraboles n'en sont pas (parties non bornées).

$O(n)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et bornée car $P = (p_{ij}) \in O(n)$ vérifie $\sum_i {p_{ij}}^2 = 1$ pour tout j ; $O(n)$ est donc une partie compacte.

$SO(n)$ est une partie fermée, intersection de deux parties fermées $O(n)$ et $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \;/\; \det M = 1\}$, et bornée, donc compacte.

4.2 Compacité et application continue

Théorème 4.1 (Image continue d'un compact).
L'image (directe) d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Preuve. La démonstration est admise. cqfd

Théorème 4.2 (Existence d'extrema). *Toute application à valeurs réelles et continue sur une partie compacte est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. Soient A une partie compacte de E et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(A, \mathbf{R})$. $\mathbf{f}(A)$ est une partie compacte de $\mathbf{R}$, donc $\sup \mathbf{f}(A)$ existe ($\mathbf{f}(A)$ est bornée), est adhérent à $\mathbf{f}(A)$, donc appartient à $\mathbf{f}(A)$ ($\mathbf{f}(A)$ est une partie fermée). Ainsi, il existe $\mathbf{a} \in A$ tel que $\sup \mathbf{f}(A) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$

La démonstration est identique pour la borne inférieure. cqfd

Exemple 4.2. Existe-t-il un triangle dont les sommets sont placés sur une ellipse donnée et dont le périmètre est maximum ?

L'ellipse se paramètre par $t \in [0, 2\pi] \mapsto (a\cos t, b\sin t) = M(t)$ et le périmètre p d'un triangle dont les sommets M_1, M_2 et M_3 sont placés sur l'ellipse, est l'application définie par :

$$\begin{aligned} p(t_1, t_2, t_3) &= \|M_1M_2\| + \|M_2M_3\| + \|M_3M_1\| \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sqrt{a^2(\cos t_{i+1} - \cos t_i)^2 + b^2(\sin t_{i+1} - \sin t_i)^2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

où on a posé $t_4 = t_1$. p est une application continue sur le compact $[0, 2\pi]^3$; elle atteint son maximum et la réponse à la question posée est : oui ! Quant à la détermination effective du ou des triangles de périmètre maximum, c'est une autre question !

5 Continuité des applications linéaires et bilinéaires

Théorème 5.1 (Continuité des applications linéaires).
Soient $(E, \| \;\|)$ et $(F, \mathcal{N})$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ; alors toute application linéaire $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

De plus, il existe $k > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathcal{N}\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big) \leqslant k\|\mathbf{x}\|$ et $\mathbf{u}$ est k-lipschitzienne.

Preuve. Les composantes de $\mathbf{u}$ relatives à une base de F sont des polynômes du premier degré en les composantes de $\mathbf{x}$ relatives à une base de E :

$$\forall \mathbf{x} \in E,\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j \mathbf{u}(\mathbf{e}_j) \tag{5.1}$$

ce qui assure la continuité de $\mathbf{u}$.

La sphère unité $S = \{\mathbf{x} \in E \;/\; \|\mathbf{x}\| = 1\}$ de E étant une partie compacte, on pose

$$k = \sup\{\mathcal{N}\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big) \;/\; \mathbf{x} \in S\}$$

et pour tout $\mathbf{x}$ non nul

$$\mathcal{N}\big(\mathbf{u}(\mathbf{x})\big) = \|\mathbf{x}\|\mathcal{N}\big(\mathbf{u}(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x})\big) \leqslant \|\mathbf{x}\|k \tag{5.2}$$

et vu la linéarité de $\mathbf{u}$, on a

$$\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E^2,\; \mathcal{N}\big(\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y})\big) = \mathcal{N}\big(\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\big) \leqslant k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \tag{5.3}$$

cqfd

Remarques. L'hypothèse de dimension finie pour F n'a pas été utilisée.

L'hypothèse de dimension finie pour E est indispensable. Soient $E = \mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme et D la dérivation. D est un endomorphisme de E non continue. Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$; on obtient $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}$ et $\|D\,f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\cos(nx)| = 1$, ce qui montre que la suite $(f_n)_n$ tend vers la fonction nulle, tandis que la suite $(D\,f_n)_n$ n'admet pas la fonction nulle pour limite.

Théorème 5.2 (Continuité des applications bilinéaires).
Soient $(E, \|\;\|_E)$, $(F, \|\;\|_F)$ et $(G, \mathcal{N})$ trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ; alors toute application bilinéaire $\mathbf{B}$ de $E \times F$ dans G est continue.

De plus, il existe $k > 0$ tel que $\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E \times F,\; \mathcal{N}\big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big) \leqslant k\|\mathbf{x}\|_E\|\mathbf{y}\|_F$

Preuve. Soient $(\mathbf{e}_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ et $(\mathbf{f}_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ des bases respectives de E et F. Pour tout $\mathbf{x} \in E$ et tout $\mathbf{y} \in F$ on a :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{B}(\sum_{j=1}^{p} x_j\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{q} y_k\mathbf{f}_k) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant k\leqslant q}} x_jy_k\mathbf{B}(\mathbf{e}_j,\mathbf{f}_k) \tag{5.4}$$

ce qui assure la continuité de $\mathbf{B}$ car ses composantes sont polynomiales (de degré deux) en les composantes de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$.

$E \times F$ est normé par $\|\cdot\| = \sup\{\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F\}$ et la partie

$$S = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E \times F \;/\; \|\mathbf{x}\|_E = \|\mathbf{y}\|_F = 1\}$$

est une partie compacte de $E \times F$. On pose $k = \sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in S}\{\mathcal{N}\big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)\}$ et pour tout $\mathbf{x}$ et tout $\mathbf{y}$ non nuls

$$\mathcal{N}\big(\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y})\big) = \|\mathbf{x}\|_E\|\mathbf{y}\|_F\mathcal{N}\Big(\mathbf{B}\Big(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_E}\mathbf{x}, \frac{1}{\|\mathbf{y}\|_F}\mathbf{y}\Big)\Big) \leqslant \|\mathbf{x}\|_E\|\mathbf{y}\|_F k \tag{5.5}$$

cqfd

Exemples 5.1. $(\lambda,\mathbf{x}) \mapsto \lambda\mathbf{x}$ est bilinéaire de $\mathbf{K} \times E$ dans E, donc continue et

$$\lambda_n \underset{n}{\longrightarrow} \lambda \text{ et } \mathbf{x}_n \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{x} \implies \lambda_n\mathbf{x}_n \underset{n}{\longrightarrow} \lambda\mathbf{x}$$

$(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}\circ\mathbf{v}$ est bilinéaire de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, donc continue et

$$\mathbf{u}_n \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v}_n \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{v} \implies \mathbf{u}_n\circ\mathbf{v}_n \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{u}\circ\mathbf{v}$$

On a la même propriété pour le produit matriciel $(A,B) \mapsto AB$

$$A_n \underset{n}{\longrightarrow} A \text{ et } B_n \underset{n}{\longrightarrow} B \implies A_nB_n \underset{n}{\longrightarrow} AB$$

Chapitre 6

Suite et série de fonctions

Sommaire

Voici quelques questions posées. Espérons qu'elles seront résolues à la fin de ce chapitre.

1. La fonction $\zeta : \alpha \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ est-elle continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$?
2. Sous quelles conditions a-t-on l'égalité
$$\lim_{t\to a}\left(\lim_n f_n(t)\right) = \lim_n\left(\lim_{t\to a} f_n(t)\right) \ ?$$
3. Peut-on approcher une fonction continue par un polynôme ? une fonction périodique par un polynôme trigonométrique ?

Les notations suivantes seront utilisées :

– I est un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point ;
– $\mathbf{K}$ désigne l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$;
– toutes les applications considérées sont des applications d'une variable réelle (notée généralement t) à valeurs réelles ou complexes et l'ensemble des applications de I vers $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ ou encore $\mathcal{F}(I)$.

1 Convergence simple

Définition 1.1 (Suite de fonctions).
On appelle *suite de fonctions définies sur I* toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(I)$, *i.e.* la donnée pour tout $n \in \mathbf{N}$ de $f_n : I \to \mathbf{K}$.

Remarque. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur I, *toutes* les fonctions f_n sont définies sur le *même* intervalle I.

Exemples 1.1.

$$I = [0,1] \text{ et } f_n : t \mapsto t^n \tag{1.1}$$

$$I = [0,+\infty[\text{ et } g_n : t \mapsto \frac{nt}{1+nt} \tag{1.2}$$

$$I = \mathbf{R} \text{ et } h_n : t \mapsto \begin{cases} n^2 t & \text{si } |t| \leqslant \frac{1}{n} \\ t^{-1} & \text{si } |t| > \frac{1}{n} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$I = [0,+\infty[\text{ et } u_n : t \mapsto \sqrt{n}\, t \exp(-nt) \tag{1.4}$$

Définition 1.2 (Convergence simple d'une suite de fonctions).
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I)$ *converge simplement sur I* si, et seulement si, pour tout $t \in I$, la suite numérique $\big(f_n(t)\big)_n$ converge dans $\mathbf{K}$. Dans ce cas, pour tout $t \in I$ on note $f(t)$ la limite de la suite $\big(f_n(t)\big)_n$ et on dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur l'intervalle I vers la fonction f.

$$\boxed{\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I \iff \\ \forall t \in I, \quad \lim_n f_n(t) = f(t) \iff \\ \forall t \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon,t) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > N(\varepsilon,t) \implies \big|f(t) - f_n(t)\big| < \varepsilon \end{array}}$$

Exemples 1.2. Reprenons les exemples du paragraphe 1.1.

Exemple (1.1) : $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$

Exemple (1.2) : $(g_n)_n$ converge simplement sur $[0,+\infty]$ vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Exemple (1.3) : $(h_n)_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Exemple (1.4) : $(u_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$.

Remarque. La convergence simple de la suite $(f_n)_n$ vers f sur I implique la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ vers f sur toute partie $J \subset I$.

Quelles sont les propriétés des fonctions f_n qui se conservent par passage à la limite simple ? Le signe, la monotonie, la convexité se conservent. Plus précisément :

Proposition 1.1. *Si pour tout $n \in \mathbf{N}$, les fonctions f_n sont positives (resp. négatives), monotones croissantes (resp. décroissantes), ou convexes sur I, alors f, la limite simple sur I de la suite $(f_n)_n$ est positive (resp. négative), monotone croissante (resp. décroissante) ou convexe.*

Preuve. Le lecteur est encouragé à démontrer ces propriétés. cqfd

Par contre, les fonctions f_n peuvent être bornées (resp. continues) pour tout $n \in \mathbf{N}$ sans que f le soit : exemple (1.3) (resp. exemples (1.1), (1.2) et (1.3)).

Un peu de vocabulaire : « convergence simple » doit toujours être accompagné de « sur I », comme le verre de bon vin accompagne le bon plat du dimanche et des jours de semaine. Lectrices, lecteurs, ne confondez pas « le verre de bon vin » et « le bon verre de vin » ; mais tous deux se doivent d'être dégustés avec modération.

Définition 1.3 (Convergence simple d'une série de fonctions).
Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$; on dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement sur I* si, et seulement si, la série numérique $\sum u_n(t)$ converge pour tout $t \in I$. Dans ce cas, on note $S(t)$ la somme de la série $\sum u_n(t)$; on a :

$$\forall t \in I,\ S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$$

Exemples 1.3. Voici trois séries de fonctions.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge simplement sur }]1, +\infty[. \tag{1.5}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[. \tag{1.6}$$

$$\sum e^{-n} e^{in^2 t} \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}. \tag{1.7}$$

Remarque. Pas besoin pour une série de fonctions de rechercher la limite simple : c'est la somme de la série !

La convergence simple sur I de la série de fonctions $\sum u_n$ est la convergence simple sur I de la *suite* de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles vers la somme S de la série.

2 Convergence uniforme des suites de fonctions

Cette section donne des conditions suffisantes pour que la limite simple d'une suite de fonctions continues (resp. bornées) soit continue (resp. bornée).

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions).
Soient une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I)$ et une fonction f de $\mathcal{F}(I)$; on dit que la suite $(f_n)_n$ *converge uniformément sur I vers f* si, et seulement si, l'écart $|f_n(t) - f(t)|$ est majoré à partir d'un certain rang indépendant de $t \in I$ par un $\varepsilon > 0$ donné à l'avance.

$$\boxed{\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \iff \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in I,\ n > N(\varepsilon) \implies \big|f_n(t) - f(t)\big| < \varepsilon \end{array}}$$

Remarque. Constatez la place du quantificateur $\forall t \in I$ et rappelez-vous que le rang N est indépendant de t, ce rang ne dépend que de ε. La convergence uniforme sur I *implique* donc la convergence simple sur I.

Attention ! La convergence simple sur I *n'implique pas* la convergence uniforme sur I.

Proposition 2.1 (Définitions équivalentes de la convergence uniforme).
Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I ;*
(*ii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > N(\varepsilon) \implies \sup_{t\in I}\big|f_n(t) - f(t)\big| < \varepsilon$
(*iii*) *il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ de nombres positifs et de limite nulle telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $t \in I$, $\big|f_n(t) - f(t)\big|$ soit majoré par ε_n.*

Voici une méthode pratique pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle I. Commencez par déterminer la limite simple sur I de cette suite et, à l'aide d'un tableau de variation, évaluez un majorant ou la borne supérieure de $|f_n(t) - f(t)|$ quand t décrit I.

Exemples 2.1. Pas de convergence uniforme sur I pour les exemples (1.1), (1.2) et (1.3), alors que pour l'exemple (1.4), la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$ (le maximum de u_n est atteint pour $t = \frac{1}{n}$).

Remarques.
La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur I implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur toute partie $J \subset I$.

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur I_1 et I_2 implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur la réunion $I_1 \cup I_2$; cette propriété se généralise à un nombre *fini* de parties.

La suite f_n de l'exemple (1.1) converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $[0, a]$ et ceci pour tout $a \in\ ]0, 1[$. Une suite $(f_n)_n$ de fonctions peut converger uniformément vers f sur tout segment de I sans converger uniformément vers f sur I. En particulier la convergence uniforme sur (I_λ) pour tout $\lambda \in \Lambda$ n'implique pas la convergence uniforme sur la réunion $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

La convergence uniforme n'est pas une propriété *locale*, mais une propriété *globale* sur l'intervalle.

2.2 Norme de la convergence uniforme

On note $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$ ou $\mathcal{B}(I)$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions numériques bornées sur l'intervalle I ; pour un élément $f \in \mathcal{B}(I)$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$$

$\| \ \|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme sur I et on peut écrire :

$$\boxed{(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \iff \|f_n - f\|_\infty \underset{n}{\longrightarrow} 0}$$

Proposition 2.2.

(*i*) *$\mathcal{B}(I)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre et $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.*
(*ii*) *Soit $(f_n)_n$ une suite qui converge uniformément vers f sur I ; alors la suite $(|f_n|)_n$ converge uniformément vers $|f|$ sur I.*
(*iii*) *Si la suite $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) converge uniformément vers f (resp. g) sur I, la suite $(f_n g_n)_n$ converge uniformément vers fg sur I.*

Preuve.
(*i*) Pour tout $t \in I$, $|(fg)(t)| = |f(t)|\,|g(t)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ ce qui établit l'inégalité $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Le produit est stable dans $\mathcal{B}(I)$, et $\mathcal{B}(I)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I)$.

(*ii*) Pour tout $t \in I$, $\big||f_n(t)| - |f(t)|\big| \leqslant |f_n(t) - f(t)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, ce qui montre que $\|(|f_n| - |f|)\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty$.

(*iii*) On a les inégalités :

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n(g_n - g) + (f_n - f)g\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|(f_n - f)g\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty \\ &\xrightarrow[n]{} \|f\|_\infty \times 0 + 0 \times \|g\|_\infty = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

cqfd

2.3 Interprétation géométrique

Plaçons-nous dans le cas des fonctions réelles et soient $f \in \mathcal{B}(I)$ et g telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$; le graphe de g se trouve dans le « tube » défini par

$$\{(t, y) \in I \times \mathbf{R} \,/\, t \in I \text{ et } f(t) - \varepsilon < y < f(t) + \varepsilon\}$$

que l'on nomme ε-tube de f.

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur I s'interprète en disant qu'un ε positif étant donné, le ε-tube de f contient les graphes des fonctions f_n à partir d'un certain rang.

Lectrices et lecteurs sont invités à dessiner de nombreux ε-tube autour du graphe de la limite. Le scribe, encore un peu trop jeune dans l'emploi de son logiciel pour y intégrer des dessins, espère que dans le futur, il pourra émailler son texte de magnifiques graphiques en noir et blanc et même en couleurs.

2.4 Convergence uniforme sur tout segment

Définition 2.2 (Convergence uniforme sur tout segment).
On dit que la suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(I)$ *converge uniformément* vers f *sur tout segment de* I si, et seulement si, pour tout segment $S \subset I$, $\|f_n - f\|_{\infty,S} = \sup_{t \in S}\big|f_n(t) - f(t)\big|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini

Remarques.
La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur I implique la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur tous les segments de I.

Attention !! La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur tous les segments de I *n'implique pas* la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur I ; l'exemple (1.1) en donne la preuve.

Par contre, la convergence uniforme sur tout segment de I implique la convergence simple sur I.

3 Convergence uniforme des séries de fonctions

Dans cette section, nous appliquons aux séries de fonctions la notion de convergence uniforme vue pour les suites ; le principe est simple, la somme d'une série est la limite d'une suite particulière : la suite de ses sommes partielles.

3.1 Généralités

Définition 3.1 (Convergence uniforme d'une série de fonctions).
Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$; on dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge uniformément sur* I si, et seulement si, la suite des sommes partielles converge uniformément sur I vers la somme S de la série, *i.e.* si, et seulement si, la suite $(R_n)_n$ de ses restes à l'ordre n converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge uniformément sur } I \iff \|S - S_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty = \sup_{t\in I}\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)\Big| \underset{n}{\longrightarrow} 0}$$

Exemples 3.1. Reprenons les exemples du paragraphe 1.3.

Exemple (1.5). En additionnant les inégalités

$$\forall k > 1,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \tag{3.1}$$

où α est un réel plus grand que 1, on obtient :

$$\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\Bigg]_{t=n+1}^{t=n+p+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{n+p} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\Bigg]_{t=n}^{t=n+p} \tag{3.2}$$

ce qui donne en passant à la limite sur p :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \tag{3.3}$$

Puisque $\sup\limits_{\alpha\in]1,+\infty[} R_n(\alpha) \geqslant \sup\limits_{\alpha\in]1,+\infty[} \dfrac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} = +\infty$, la série $\sum n^{-\alpha}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

En se limitant à l'intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 1$, on obtient

$$\sup_{\alpha\in[a,+\infty[} R_n(\alpha) \leqslant \sup_{\alpha\in[a,+\infty[} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(a-1)n^{a-1}} \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{3.4}$$

ce qui établit la convergence uniforme de la série $\sum n^{-\alpha}$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 1$.

Exemple (1.6). La série $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$ vérifie le critère spécial des séries alternées ; le reste de cette série se majore facilement : sur l'intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, on obtient :

$$\forall \alpha \geqslant a,\ |R_n(\alpha)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \tag{3.5}$$

ce qui montre que $\sup_{\alpha\in[a,+\infty[} |R_n(\alpha)| \leqslant (n+1)^{-a}$ et assure la convergence uniforme de la série $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Remarque. L'exemple (1.5) montre que la convergence uniforme d'une série sur tous les intervalles $[a,+\infty[$ avec $a > 1$ *n'implique pas* la convergence uniforme sur $cup_{a>1}[a,+\infty[=]1,+\infty[$.

3.2 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 3.2 (Convergence normale).
Soit $(u_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$; on dit que la série $\sum u_n$ *converge normalement sur* I si, et seulement si, la série de terme général $\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in I} |u_n(t)|$ est une série convergente.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur } I \iff \sum \|u_n\|_\infty = \sum \sup_{t\in I} |u_n(t)| \text{ est convergente}}$$

Définition 3.3 (Série majorante).
La série numérique à *termes réels positifs* $\sum \alpha_n$ est une série *majorante sur* I de la série de fonctions $\sum u_n$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in I,\ |u_n(t)| \leqslant \alpha_n$$

Théorème 3.1 (Critère de Weierstrass).
Pour établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$, il suffit de trouver une série numérique majorante convergente.

Preuve. Si $\sum \alpha_n$ est une telle série, on a $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in I,\ |u_n(t)| \leqslant \alpha_n$ ce qui implique :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \sup_{t\in I} |u_n(t)| = \|u_n\|_\infty \leqslant \alpha_n \tag{3.6}$$

et assure, par le critère de comparaison, la convergence de $\sum \|u_n\|_\infty$. cqfd

Théorème 3.2 (Convergences normale et uniforme).
Toute série qui converge normalement sur I, converge absolument et uniformément sur I, et

$$\sup_{t\in I}\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big| = \Big\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|_\infty$$

Preuve. L'inégalité $|u_n(t)| \leqslant \|u_n\|_\infty$ pour $t \in I$ et $n \in \mathbf{N}$ montre la convergence de $\sum |u_n(t)|$, *i.e.* l'absolue convergence de $\sum u_n(t)$ pour tout $t \in I$.

L'absolue convergence de $\sum u_n(t)$ donne les inégalités pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\forall t \in I,\ |R_n(t)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t)\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(t)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty \tag{3.7}$$

ce qui montre que $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|u_k\|_\infty$, et puisque $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\|u_k\|_\infty \underset{n}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente), $\|R_n\|_\infty$ tend vers 0.

Reprenons les inégalités :

$$\forall t \in I,\ \Big|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\|u_k\|_\infty \tag{3.8}$$

Par passage à la borne supérieure sur t, on obtient le résultat demandé. cqfd

Exemples 3.2. Reprenons les exemples du paragraphe 1.3

Exemple (1.5). Puisque $\sup_{\alpha\in[a,+\infty[} n^{-\alpha} = n^{-a}$, la série $\sum n^{-\alpha}$ converge normalement sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, mais ne converge pas normalement sur $\cup_{a>1}[a, +\infty[\, = \,]1, +\infty[$.

Exemple (1.6). La série $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$ converge uniformément sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, mais ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Exemple (1.7). Puisque $|e^{-n}e^{in^2t}| = e^{-n}$, la série $\sum e^{-n}e^{in^2t}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

3.3 Convergences normale et uniforme sur tout segment

Définition 3.4 (Convergence uniforme sur tout segment).
La série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I si, et seulement si, la suite $(R_n)_n$ de ses restes à l'ordre n converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de I.

Définition 3.5 (Convergence normale sur tout segment).
La série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de I si, et seulement si, pour tout segment $K \subset I$, la série $\sum\|u_n\|_{\infty,K}$ est convergente.

Remarques.

La convergence normale de la série sur tout segment de I implique la convergence absolue de cette série sur I et sa convergence uniforme sur tout segment de I, mais n'implique ni sa convergence normale, ni sa convergence uniforme sur I.

Par exemple, la série $\sum n^{-\alpha}$ converge normalement sur tout segment de l'intervalle $]1, +\infty[$ et ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$. La série $\sum(-1)^{n-1}n^{-\alpha}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$, mais ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

4 Continuité

4.1 Continuité de la limite uniforme

Lemme 4.1 (Continuité de la limite en un point).
Soient $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}(I)$ et a un point de I ; si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I et si, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Preuve. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, il vient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in I,\ n \geqslant N \implies |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.1}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et utilisons la fonction f_N :

$$\begin{array}{rcccccc} |f(t) - f(a)| & \leqslant & |f(t) - f_N(t)| & + & |f_N(t) - f_N(a)| & + & |f_N(a) - f(a)| \\ & \leqslant & \frac{\varepsilon}{3} & + & |f_N(t) - f_N(a)| & + & \frac{\varepsilon}{3} \end{array}$$

La continuité de f_N en a donne l'existence de $\eta > 0$ tel que $|t-a| < \eta$ implique $|f_N(t)-f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Ainsi $|t - a| < \eta$ implique $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$ et f est continue en a. cqfd

Corollaire. *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur I et a un point de I ; si pour tout n, f_n est continue en a et si f n'est pas continue en a, la convergence de la suite $(f_n)_n$ vers f n'est pas uniforme sur I.*

Preuve. Raisonnement par l'absurde en utilisant le lemme précédent. cqfd

Exemple 4.1. La limite f de l'exemple (1.1) du paragraphe 1.1 n'est pas continue sur $[0, 1]$ alors que les fonctions f_n le sont ; la suite f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Théorème 4.2 (Limite uniforme d'une suite de fonctions continues).
Toute suite de fonctions continues *qui converge uniformément sur I a sa limite continue sur I.*
Toute suite de fonctions continues *qui converge uniformément sur tout segment de I a sa limite continue sur I.*

Preuve. Soit a un point intérieur à I et $T = [c, d]$ un segment de I voisinage de a $(c < a < d)$. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur T vers f et pour tout n, f_n est continue en a, et le lemme montre la continuité de f en a.
Si a est une extrémité de I, on prendra un segment $T = [a, c]$ ou $T = [c, a]$. cqfd

Remarque. La continuité est une propriété locale : une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle, ou encore sur tout segment de cet intervalle.

4.2 Permutation de deux limites

Peut-on sans précaution permuter deux signes limite ? La réponse est non comme le montre cet exemple :

$$\lim_n \left(\lim_m \frac{m}{n+m} \right) = \lim_n 1 = 1 \tag{4.2}$$

$$\lim_m \left(\lim_n \frac{m}{n+m} \right) = \lim_m 0 = 0 \tag{4.3}$$

Par contre, sous les hypothèses du théorème précédent, la continuité de f et des f_n en a s'interprète de la manière suivante :

$$f(a) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to a} f(t) = \lim\limits_{t\to a} \left(\lim\limits_n f_n(t) \right) \\ \lim\limits_n f_n(a) = \lim\limits_n \left(\lim\limits_{t\to a} f_n(t) \right) \end{cases} \tag{4.4}$$

et sous ces hypothèses, la permutation des deux signes limite est licite, c'est le théorème de la double limite dans le cas où a appartient à I. Reste maintenant le cas où a est une extrémité de I.

Théorème 4.3 (de la double limite).
Soient a une extrémité de I, $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I et telle que, pour tout n, $\lim_{t\to a, t\in I} f_n(t)$ existe et vaut b_n ; alors

(*i*) *la suite $(b_n)_n$ est une suite convergente ;*
(*ii*) $\lim_{t\to a} f(t) = \lim_n b_n$, i.e.

$$\lim_n \Big(\lim_{\substack{t\to a \\ t\in I}} f_n(t) \Big) = \lim_{\substack{t\to a \\ t\in I}} \Big(\lim_n f_n(t) \Big)$$

Preuve.
(*i*) Soient $\varepsilon > 0$ et N le rang à partir duquel $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in I$; alors :

$$\forall t \in I,\ \forall (n,p) \in \mathbf{N}^2,\ n > N \implies |f_n(t) - f_{n+p}(t)| \leqslant |f_n(t) - f(t)| + |f_{n+p}(t) - f(t)| < \varepsilon$$

et en faisant tendre t vers a en restant dans I, n et p fixés, on a

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2,\ n > N \implies |b_n - b_{n+p}| \leqslant \varepsilon \tag{4.5}$$

La suite $(b_n)_n$ est une suite de Cauchy, donc une suite convergente dans $\mathbf{K}$; sa limite est notée b.
(*ii*) Si a est fini, on pose $\tilde{f}_n$ (resp. $\tilde{f}$) le prolongement de f_n (resp. f) à $I \cup \{a\}$ en posant $f_n(a) = b_n$ (resp. $f(a) = b$). La suite $(\tilde{f}_n)_n$ converge uniformément vers $\tilde{f}$ sur $I \cup \{a\}$ et, puisque pour tout n, $\tilde{f}_n$ est continue en a, $\tilde{f}$ est aussi continue en a, ce qui donne la relation proposée.
Si $a \in \{+\infty, -\infty\}$ on modifie la démonstration en conséquence en utilisant l'inégalité :

$$|f(t) - b| \leqslant |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - b_N| + |b_N - b|$$

cqfd

4.3 Applications aux séries

Théorème 4.4 (Continuité de la somme d'une série).
Si $\sum u_n$ est une série de fonctions continues *sur I qui converge uniformément sur tout segment de I, la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$est une fonction continue sur I.*

Preuve. Pour tout n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est continue sur I et $(S_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I ; S est donc une fonction continue sur I. cqfd

Exemples 4.2.
$\alpha \mapsto \sum_{n>0} n^{-\alpha}$ est continue sur $]1, +\infty[$;
$\alpha \mapsto \sum_{n>0} (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$;
$t \mapsto e^{-n} e^{in^2 t}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Permutation des signes lim et $\sum$

Sous les hypothèses du théorème (4.4), on peut écrire pour a dans I :

$$S(a) = \begin{cases} \lim_{t\to a} S(t) = \lim_{t\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to a} u_n(t) \end{cases} \tag{4.6}$$

ce qui justifie la permutation du signe $\lim_{t\to a}$ avec le signe $\sum_{n=0}^{\infty}$. Si a est une extrémité de I, on a le

Théorème 4.5 (de permutation des signes lim et $\sum$).
Soient a une extrémité de I, $\sum u_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur I telle que, pour tout n, $\lim_{t\to a, t\in I} u_n(t)$ existe et vaut b_n ; alors

(*i*) *la série* $\sum b_n$ *est convergente ;*
(*ii*) $\lim_{t\to a}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, i.e.

$$\lim_{t\to a, t\in I}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{t\to a, t\in I} u_n(t)$$

Preuve. La démonstration est une application du théorème de la double limite pour la suite $(S_n)_n$. cqfd

5 Quelques espaces fonctionnels

Dans cette section, nous allons définir quelques espaces de fonctions, encore appelés espaces fonctionnels : espace des fonctions en escalier, des fonctions continues par morceaux, des polynômes trigonométriques. Ces fonctions sont définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans les applications pratiques, les fonctions sont numériques, *i.e.* à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

On note $\mathcal{F}([a,b],E)$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des fonctions définies sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans E ; $\mathcal{F}([a,b],\mathbf{K})$ est aussi noté $\mathcal{F}([a,b])$.

5.1 Subdivision

Définition 5.1 (Subdivision).
Toute suite $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ strictement croissante de $[a,b]$ avec $a_0 = a$ et $a_n = b$ est appelée *subdivision du segment* $[a,b]$; on a les inégalités :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

Définition 5.2 (Subdivision plus fine qu'une autre).
La subdivision σ_1 est plus fine que la subdivision σ_2 si, et seulement si, tous les éléments de σ_2 appartiennent à σ_1 et on note $\sigma_2 \subset \sigma_1$.

Définition 5.3 (Intersection et union de subdivisions).
La subdivision obtenue en ordonnant les éléments communs à σ_1 *et* σ_2 est notée $\sigma_1 \cap \sigma_2$.

La subdivision obtenue en ordonnant les éléments de σ_1 *ou* σ_2 est notée $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

Remarque. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions alors

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 \subset \sigma_1 \subset \sigma_1 \cup \sigma_2 \quad \text{et} \quad \sigma_1 \cap \sigma_2 \subset \sigma_2 \subset \sigma_1 \cup \sigma_2$$

5.2 Fonctions en escalier sur un segment

Définition 5.4 (Fonction en escalier).
Une fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a,b],E)$ est dite *en escalier* si, et seulement si, il existe une subdivision $\sigma_{\mathbf{f}} = (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la restriction de $\mathbf{f}$ à l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ est constante.

La subdivision $\sigma_{\mathbf{f}}$ est dite *subordonnée* à $\mathbf{f}$; cette subdivision n'est pas unique ; en particulier, toute subdivision plus fine que $\sigma_{\mathbf{f}}$ convient encore.

On note $\mathcal{E}sc([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E ; au lieu de $\mathcal{E}sc([a,b],\mathbf{K})$, on utilisera $\mathcal{E}sc([a,b])$.

Proposition 5.1 (Structure algébrique).
$\mathcal{E}sc([a,b],E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; $\mathcal{E}sc([a,b])$ est une $\mathbf{K}$-algèbre.

Preuve. Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ (resp. f et g) deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E (resp. dans $\mathbf{K}$), $\sigma_{\mathbf{f}}$ et $\sigma_{\mathbf{g}}$ resp. σ_f et σ_g) leurs subdivisions subordonnées ; alors $\sigma = \sigma_{\mathbf{f}} \cup \sigma_{\mathbf{g}}$ (resp. $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$) est une subdivision subordonnée à $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ (resp. f et g). Posons $\sigma = (b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$; puisque les restrictions de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ (resp. f et g) à $]b_{k-1}, b_k[$ sont constantes pour $k \in [\![1,n]\!]$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, la restriction de $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ (resp. $\lambda f + \mu g$ et fg) à $]b_{k-1}, b_k[$ est constante (resp. sont constantes) pour $k \in [\![1,n]\!]$, et donc :

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall(\mathbf{f},\mathbf{g}) \in \mathcal{E}sc([a,b],E),\ \lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g} \in \mathcal{E}sc([a,b],E) \tag{5.1}$$

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall(f,g) \in \mathcal{E}sc([a,b]),\ \lambda f + \mu g \in \mathcal{E}sc([a,b],\text{ et })fg \in \mathcal{E}sc([a,b]) \tag{5.2}$$

$\mathcal{E}sc([a,b],E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],E)$ et, puisque la fonction constante 1 est en escalier sur $[a,b]$, $\mathcal{E}sc([a,b])$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a,b])$. cqfd

Remarque. $\mathcal{E}sc([a,b])$ est engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalles de $[a,b]$.

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{]a_{k-1},a_k[} + \sum_{k=0}^{n} f(a_k)\chi_{\{a_k\}} \tag{5.3}$$

5.3 Fonction en escalier sur R

Définition 5.5 (Fonction en escalier sur R).
Une fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbf{R},E)$ est dite *en escalier* si, et seulement si, il existe un segment $S_{\mathbf{f}}$ tel que $\mathbf{f}$ soit nulle en dehors de $S_{\mathbf{f}}$ et en escalier sur $S_{\mathbf{f}}$.

Le segment $S_{\mathbf{f}}$ est appelé *domaine subordonné* à $\mathbf{f}$; il n'est pas unique, tout segment contenant $S_{\mathbf{f}}$ convient encore.

L'ensemble des fonctions en escalier sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans E est noté $\mathcal{E}sc(\mathbf{R},E)$; $\mathcal{E}sc(\mathbf{R},\mathbf{K})$ est aussi noté $\mathcal{E}sc(\mathbf{R})$.

Remarque. La fonction nulle est la seule fonction constante en escalier sur $\mathbf{R}$.

Proposition 5.2 (Structure algébrique).
$\mathcal{E}sc(\mathbf{R},E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; la multiplication est stable sur $\mathcal{E}sc(\mathbf{R})$.

Preuve. Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ (resp. f et g) deux fonctions en escalier sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans E (resp. dans $\mathbf{K}$) et $[a,b]$ un intervalle en dehors duquel $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{g}$ (resp. f *et* g) sont nulles ; alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ (resp. $\lambda f + \mu g$ et fg) est nulle (resp. sont nulles) en dehors de $[a,b]$ et en escalier sur $[a,b]$.

$\mathcal{E}sc(\mathbf{R},E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R},E)$; la fonction constante 1 n'est pas une fonction en escalier sur $\mathbf{R}$, ainsi $\mathcal{E}sc(\mathbf{R})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbf{R})$, mais un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ sur lequel la multiplication est stable. cqfd

Remarque. $\mathcal{E}sc(\mathbf{R})$ est engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalles bornés.

5.4 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 5.6 (Fonction continue par morceaux).
Une application $\mathbf{f}$ de $[a,b]$ vers E est dite *continue par morceaux* sur $[a,b]$ si, et seulement si, il existe une subdivision $\sigma_{\mathrm{f}} = (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la restriction de $\mathbf{f}$ à l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ soit prolongeable par continuité au segment $[a_{k-1}, a_k]$.

La subdivision σ_{f} est dite *subordonnée* à $\mathbf{f}$.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ est noté $\mathcal{CM}([a,b],E)$; $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$ est encore noté $\mathcal{CM}([a,b])$.

Proposition 5.3 (Caractérisation).
$\mathbf{f}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si, et seulement si, il existe une subdivision $\sigma_{\mathbf{f}} = (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que $\mathbf{f}$ soit continue sur $[a,b] \setminus \{a_k \ /\ k \in [\![0,n]\!]\}$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ les limites $\lim\limits_{t\downarrow a_{k-1}} \mathbf{f}(t)$ et $\lim\limits_{t\uparrow a_k} \mathbf{f}(t)$ existent.

Proposition 5.4 (Structure algébrique).
$\mathcal{CM}([a,b],E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; $\mathcal{CM}([a,b])$ est une $\mathbf{K}$-algèbre.

PREUVE. Considérons $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ (resp. f et g) deux fonctions de $\mathcal{CM}([a,b],E)$ (resp. $\mathcal{CM}([a,b])$) et la subdivision $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]} = \sigma_{\mathbf{f}} \cup \sigma_{\mathbf{g}}$ (resp. $\sigma_f \cup \sigma_g$) subordonnée à $\mathbf{f}$ et à $\mathbf{g}$ (resp. f et g) ; pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ (resp. $\lambda f + \mu g$ et fg) est continue (resp. sont continues) sur $]b_{k-1}, b_k[$ et se prolonge (resp. se prolongent) par continuité à $[b_{k-1}, b_k]$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

$\mathcal{CM}([a,b],E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],E)$, et, puisque la fonction constante 1 est une fonction continue (donc continue par morceaux) sur $[a,b]$, $\mathcal{CM}([a,b])$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}([a,b])$. cqfd

Remarque. $\mathcal{E}sc([a,b],E)$ est engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalles bornés.

5.5 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition 5.7 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle).
Si I est un intervalle quelconque, on dit qu'une fonction est *continue par morceaux sur I* si, et seulement si, sa restriction à tout segment S de I est continue par morceaux sur S.

$\mathcal{CM}(I,E)$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I ; $\mathcal{CM}(I,\mathbf{K})$ est encore noté $\mathcal{CM}(I)$.

Si I est un segment, on retrouve la définition précédente.

Proposition 5.5 (Structure algébrique).
$\mathcal{CM}(I,E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; $\mathcal{CM}(I)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre.

PREUVE. Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ (resp. f et g) deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans E (resp. dans $\mathbf{K}$), λ et μ deux scalaires ; pour tout segment S de I, $\mathbf{f}|_S$, $\mathbf{g}|_S$, $(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})|_S$ (resp. $f|_S$, $g|_S$, $(\lambda f + \mu g)|_S$, $(fg)|_S$) sont continues par morceaux sur S.

$\mathcal{CM}(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,E)$; la fonction constante 1 est continue sur I (donc continue par morceaux sur tout segment de I), ainsi $\mathcal{CM}(I)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I)$. cqfd

Exemples 5.1. La fonction $t \mapsto t^{-1}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$, mais n'est pas continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

La fonction Ent (partie entière) est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, mais n'est pas une fonction en escalier sur $\mathbf{R}$.

$t \mapsto t\ \mathrm{Ent}(t^{-1})$ est une fonction continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, mais n'est pas continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ bien qu'elle soit continue en $t=0$.

5.6 Polynômes trigonométriques

5.6.1 Fonctions 2π-périodiques

Définitions 5.8 (Produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$).
La $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques et à valeurs complexes est notée $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Le produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ est défini par :

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi} \times \mathcal{C}_{2\pi},\ \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt}$$

et pour $k \in \mathbf{Z}$, on note e_k est la fonction $t \mapsto \exp(ikt) = e^{ikt}$.

Proposition 5.6. *$\mathcal{C}_{2\pi}$ muni de $\langle\ \mid\ \rangle$ est un espace préhilbertien complexe et $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ une famille orthonormale,* i.e. *:*

$$\forall (r,s) \in \mathbf{Z}^2,\ \langle e_r \mid e_s \rangle = \delta_{r,s} = \begin{cases} 1 & si\ r = s \\ 0 & si\ r \neq s \end{cases}$$

Preuve. $\langle \mid \rangle$ est une forme bilinéaire à symétrie hermitienne telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$:

- $2\pi\langle f \mid f\rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \geqslant 0$
- $0 = 2\pi\langle f \mid f\rangle = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$ implique $f = 0$, puisque $t \mapsto |f(t)|^2$ est une fonction positive, continue et d'intégrale nulle.

Si $r = s$, on a :

$$\langle e_r \mid e_r\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-irt}e^{irt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, dt = 1 \tag{5.4}$$

pour $r \neq s$, il vient :

$$\langle e_r \mid e_s\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-irt}e^{ist}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(s-r)t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-i(r-s)t}}{-i(r-s)}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 \tag{5.5}$$

cqfd

5.6.2 Polynômes trigonométriques

Définition 5.9 (Polynômes trigonométriques).
On appelle *polynôme trigonométrique de degré au plus n* toute combinaison linéaire de la famille $(e_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$; si P est un polynôme trigonométrique de degré au plus n, il existe une famille $(c_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ de nombres complexes tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

L'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus n est noté $\mathcal{T}_{n,2\pi}$; l'ensemble des polynômes trigonométriques est noté $\mathcal{T}_{2\pi}$ et on a : $\mathcal{T}_{2\pi} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{T}_{n,2\pi}$.

Proposition 5.7. *On a les propriétés suivantes :*

(i) si P est un polynôme trigonométrique, la suite $(c_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est unique et donnée par l'expression :

$$c_k = \langle e_k \mid P\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\, dt$$

(ii) $\mathcal{T}_{n,2\pi}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $2n+1$, la famille $(e_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ en constitue une base ;

(iii) $\mathcal{T}_{2\pi}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre de dimension infinie, la famille $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ en constitue une base.

Preuve.

(i) Si P est un polynôme trigonométrique, il existe un entier n et une famille de nombres complexes $(c_j)_{j\in[\![-n,n]\!]}$ tels que $P = \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j$ et

$$\langle e_k \mid P\rangle = \langle e_k \mid \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j\rangle = \sum_{j=-n}^{n} c_j\langle e_k \mid e_j\rangle = \begin{cases} c_k & \text{si } k \in [\![-n,n]\!] \\ 0 & \text{si } k \notin [\![-n,n]\!] \end{cases} \tag{5.6}$$

ce qui montre l'unicité des nombres c_k.

(ii) Tout polynôme trigonométrique de degré n se décompose de manière unique sur la famille $(e_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$, ce qui démontre que $(e_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{T}_{n,2\pi}$; la dimension de $\mathcal{T}_{n,2\pi}$ sur $\mathbf{C}$ est $2n+1$.

(iii) De même, tout polynôme trigonométrique de décompose de manière unique sur la famille de fonctions $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ qui est donc une base de $\mathcal{T}_{2\pi}$; le produit de deux polynômes trigonométriques est un polynôme trigonométrique, ce qui montre la stabilité du produit ; ainsi $\mathcal{T}_{2\pi}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

cqfd

5.6.3 Expression des polynômes trigonométriques à l'aide des fonctions sin et cos

Proposition 5.8. *Tout polynôme trigonométrique P s'écrit de manière unique*

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} &\textit{avec} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\cos(kt)\,dt = 2\langle \cos k\cdot \mid P\rangle \\ &\textit{et} \qquad \forall k \in [\![1,n]\!],\ b_k = i(c_k + c_{-k}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\sin(kt)\,dt = 2\langle \sin k\cdot \mid P\rangle \end{aligned}$$

Preuve. Rappelons les formules d'Euler : $\exp(ikt) = \cos(kt) + i\sin(kt)$ et écrivons :

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt}) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(c_k(\cos kt + i\sin kt) + c_{-k}(\cos kt - i\sin kt)\big) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big((c_k + c_{-k})\cos(kt) + i(c_k - c_{-k})\sin(kt)\big) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \end{aligned}$$

Ainsi on a l'expression intégrale des coefficients a_k et b_k :

$$\begin{aligned} a_k = c_k + c_{-k} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)(e^{-ikt} + e^{ikt})\,dt == \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\cos(kt)\,dt = 2\langle \cos k\cdot \mid P\rangle \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b_k = i(c_k - c_{-k}) &= i\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{ikt}\,dt)\right) \\ &= i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)(e^{-ikt} - e^{ikt})\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\sin(kt)\,dt = 2\langle \sin k\cdot \mid P\rangle \end{aligned}$$

cqfd

5.6.4 Généralisation aux fonctions T-périodiques

Donnons le principe du passage d'une fonction T-périodique à une fonction 2π-périodique. Si T est une période et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation associée, à toute fonction T-périodique f, on fait correspondre la fonction :

$$g : t \mapsto g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = f\left(\frac{t}{\omega}\right) \tag{5.8}$$

et g admet 2π pour période.

Réciproquement, si g admet 2π pour période, la fonction

$$f : t \mapsto f(t) = g\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = g(\omega t) \tag{5.9}$$

admet T pour période.

Par exemple, les polynômes trigonométriques de période T sont de la forme :

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big) \tag{5.10}$$

où les coefficients c_k, a_k et b_k vérifient les relations suivantes :

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)e^{-ik\omega t}\,dt \tag{5.11}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\cos(k\omega t)\,dt \tag{5.12}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T}\int_0^T P(t)\sin(k\omega t)\,dt \tag{5.13}$$

On note $\mathcal{C}_T$ (resp. $\mathcal{T}_T$) la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions (resp. des polynômes trigonométriques) de période T et continues sur $\mathbf{R}$.

6 Approximation des fonctions d'une variable réelle

6.1 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Lemme 6.1. *Toute fonction numérique continue sur un segment peut s'approcher à ε près par une fonction en escalier,* i.e. *:*

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b]),\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\varphi_\varepsilon \in \mathcal{E}sc([a,b]),\ \|f - \varphi_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$$

Preuve *(hors programme).* Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$; f est *uniformément continue* sur le segment $[a,b]$, *i.e.* :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall(t_1,t_2) \in [a,b]^2,\ |t_1 - t_2| < \eta \implies |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon \tag{6.1}$$

Soient $\varepsilon > 0$, un entier n tel que $\frac{b-a}{n} \leqslant \eta$ ($n = \mathrm{Ent}(\frac{b-a}{\eta}+1$ convient), la subdivision $\sigma = (a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ avec $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et φ_ε la fonction en escalier définie par :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall t \in [a_{k-1},a_k[,\ \varphi_\varepsilon(t) &= f(a_{k-1}) \\ \varphi_\varepsilon(b) &= f(b) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Cette construction de φ_ε permet d'affirmer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall t \in [a_{k-1},a_k[,$$
$$0 \leqslant t - a_{k-1} \leqslant \frac{b-a}{n} \leqslant \eta \implies |f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| = |f(t) - f(a_{k-1})| < \varepsilon \tag{6.3}$$

ce qui montre que $\|f - \varphi_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$ cqfd

Théorème 6.2. *Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

Preuve. On applique le lemme précédent pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ et la suite $(\varphi_{\frac{1}{n+1}})_n$ convient. cqfd

Théorème 6.3 (Extension aux fonctions continues par morceaux).
Toute fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve *(hors programme).* Soient $f \in \mathcal{CM}([a,b])$, $\sigma_f = (a_k)_{k=0}^{k=n}$ une subdivision subordonnée à f et ε un nombre positif. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f|_{]a_{k-1},a_k[}$ possède un prolongement continue g_k à $[a_{k-1},a_k]$; il existe une fonction $\varphi_{k,\varepsilon}$ en escalier sur $[a_{k-1},a_k]$ telle que $\|g_k - \varphi_{k,\varepsilon}\|_{\infty,[a_{k-1},a_k]} \leqslant \varepsilon$.

J'appelle φ_ε la fonction en escalier qui vaut $\varphi_{k,\varepsilon}$ sur $\cup_{k=1}^n]a_{k-1},a_k[$ et dont la valeur en a_k est $f(a_k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. Pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon$, soit $\|f - \varphi_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$. Ainsi

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b]),\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\varphi_\varepsilon \in \mathcal{E}sc([a,b]),\ \|f - \varphi_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon \tag{6.4}$$

La suite $(\varphi_{\frac{1}{n+1}})_n$ convient. cqfd

6.2 Approximation uniforme par des polynômes

Théorème 6.4. *Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales,* i.e. *:*

$$\forall f \in \mathcal{C}([a,b]),\ \exists (P_n)_n \text{ suite de } \mathbf{K}[X],\ \|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[n]{} 0$$

Preuve *(hors programme).* Toute fonction g continue sur $[0,1]$ est la limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite $\big(B_n(g)\big)_n$ des polynômes de Bernstein (voir la démonstration en travaux dirigés).

Utilisons le $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $t \mapsto u = \frac{t-a}{b-a}$ de $[a,b]$ sur $[0,1]$, l'application réciproque étant $u \mapsto t = a + u(b-a)$ pour passer d'une fonction f continue sur $[a,b]$ à la fonction $g : u \mapsto f\big(a+u(b-a)\big)$ continue sur $[0,1]$ et posons $Q_n(t) = B_n(g)\big(\frac{t-a}{b-a}\big)$; Q_n est une fonction polynomiale (de t). On a :

$$\forall t \in [a,b],\ |f(t) - Q_n(t)| = \left| g\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) - B_n(g)\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) \right| \tag{6.5}$$

ce qui donne en passant à la borne supérieure :

$$\begin{aligned} \|f - Q_n\|_{\infty,[a,b]} &= \sup_{t\in[a,b]} \left| g\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) - B_n(g)\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) \right| \\ &= \sup_{u\in[0,1]} |g(u) - B_n(g)(u)| = \|g - B_n(g)\|_{\infty,[0,1]} \end{aligned} \tag{6.6}$$

ce qui montre que $\|f - Q_n\|_{\infty,[a,b]}$ tend vers 0. cqfd

6.3 Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Théorème 6.5. *Toute fonction périodique et continue sur* $\mathbf{R}$ *est limite uniforme sur* $\mathbf{R}$ *d'une suite de polynômes trigonométriques,* i.e. *:*

$$\forall f \in \mathcal{C}_T,\ \exists (P_n)_n \text{ suite de } \mathcal{T}_T,\ \|f - P_n\|_{\infty,\mathbf{R}} \xrightarrow[n]{} 0$$

Preuve *(hors programme).* La démonstration est faite dans le chapitre des séries de Fourier, avec l'hypothèse supplémentaire pour la fonction f d'être de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le théorème de Fejer (voir les travaux dirigés) en donne une démonstration dans le cas général. cqfd

Chapitre 7

Dérivation des fonctions vectorielles

Sommaire

Le but de ce chapitre est de définir la dérivation des fonctions vectorielles, de définir aussi les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, sans oublier de consolider nos connaissances sur la dérivation des fonctions complexes.

Nous utiliserons les notations suivantes : $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; I est un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point ; les fonctions étudiées sont définies sur I et à valeurs dans E, *i.e.* des éléments de $\mathcal{F}(I,E)$; si I est un intervalle d'extrémités a et b, l'intérieur de I désigne l'intervalle ouvert $]a,b[$.

1 Dérivée, fonction dérivée

1.1 Dérivée en un point

Définition 1.1 (Vecteur dérivée). La fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I,E)$ est dérivable en un point $a \in I$ si, et seulement si, l'application qui à $t \in I \setminus \{a\}$ associe $(t-a)^{-1}\big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)\big)$ admet une limite dans E. Dans ce cas, cette limite est appelée *vecteur dérivée* ou plus simplement *dérivée* de $\mathbf{f}$ en a ; on la note $\mathbf{f}'(a)$, $\mathrm{D}\,\mathbf{f}(a)$, $\dfrac{d\mathbf{f}}{dt}(a)$ ou encore $\dfrac{d}{dt}\big(\mathbf{f}(t)\big)|_{t=a}$.

$$\boxed{\mathbf{f}'(a) = \mathrm{D}\,\mathbf{f}(a) = \frac{d\mathbf{f}}{dt}(a) = \frac{d}{dt}\big(\mathbf{f}(t)\big)\Big|_{t=a} = \lim_{\substack{t\to a\\ t\in I\setminus\{a\}}} \frac{1}{t-a}\Big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)\Big)}$$

On peut utiliser le changement de variable : $t = a+h$ et :

$$\boxed{\mathbf{f}'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\big(\mathbf{f}(a+h)-\mathbf{f}(a)\big)}$$

Remarque (Interprétation géométrique). Dans le cas réel et si a est un point intérieur à I, la droite paramétrée par

$$\lambda \in \mathbf{R} \mapsto \big(a, \mathbf{f}(a)\big) + \big(\lambda, \lambda\mathbf{f}'(a)\big)$$

est la *tangente* en $\big(a,\mathbf{f}(a)\big)$ au graphe de $\mathbf{f}$ dans $I \times E$.

Remarque (Interprétation cinématique). Toujours dans le cas réel et maintenant pour un espace E de dimension 3, $\mathbf{f}(t)$ s'interprète comme la position à l'instant t d'un point mobile $M(t)$ défini par : $\overrightarrow{OM(t)} = \mathbf{f}(t)$, et le vecteur $\mathbf{f}'(a)$ comme le *vecteur vitesse* de ce mobile à l'instant $t=a$.

1.2 Dérivée et développement limité d'ordre un

La dérivabilité de $\mathbf{f}$ en a se caractérise par l'existence d'une fonction $\boldsymbol{\varepsilon}$ de limite nulle en a, définie par

$$\boldsymbol{\varepsilon} : t \mapsto \frac{1}{t-a}\big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)\big) - \mathbf{f}'(a) \text{ si } t \neq a$$

et on peut écrire :

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a) + (t-a)\mathbf{f}'(a) + (t-a)\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

ce qui montre :

Proposition 1.1. $\mathbf{f}$ *est dérivable en a si, et seulement si,* $\mathbf{f}$ *possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a.*

Corollaire. *Toute fonction dérivable en a est continue en a ; la réciproque est fausse.*

Preuve. L'existence d'un développement limité montre la continuité et $t \mapsto |t|$ est une fonction continue (sur $\mathbf{R}$) qui n'est pas dérivable en $t=0$. cqfd

1.3 Dérivées à droite, à gauche

Définitions 1.2 (Dérivée à droite, dérivée à gauche).

La fonction $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I,E)$ est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en un point $a \in I$ si $I_a^+ = I \cap [a,+\infty[$ (resp. $I_a^- = I \cap]-\infty,a]$) n'est pas réduit à un point et si la restriction de $\mathbf{f}$ à I_a^+ (resp. I_a^-) admet une dérivée en a. Dans ce cas, une telle dérivée s'appelle *dérivée à droite* (resp. *dérivée à gauche*) de $\mathbf{f}$ en a ; elle est notée $\mathbf{f}'_d(a)$ (resp. $\mathbf{f}'_g(a)$).

$$\boxed{\mathbf{f}'_d(a) = \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \frac{1}{t-a}\Big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)\Big) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\Big(\mathbf{f}(a+h)-\mathbf{f}(a)\Big)}$$

$$\boxed{\mathbf{f}'_g(a) = \lim_{\substack{t\to a\\ t<a}} \frac{1}{t-a}\Big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)\Big) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h}\Big(\mathbf{f}(a+h)-\mathbf{f}(a)\Big)}$$

Remarque. Le symbole $\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}}$ (resp. $\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}}$) peut encore se noter $\lim_{t\downarrow a}$ (resp. $\lim_{t\uparrow a}$).

1.4 Fonction dérivée

Définition 1.3 (Fonction dérivée).

Une fonction $f \in \mathcal{F}(I,E)$ est dérivable sur I si, et seulement si, elle est dérivable en tout point de I. On définit alors l'application dérivée de $\mathbf{f}$ notée $\mathbf{f}'$ ou $\mathrm{D}\,\mathbf{f}$ par :

$$\mathbf{f}' : t \in I \mapsto \mathbf{f}'(t)$$

L'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E est notée $\mathcal{D}(I,E)$; $\mathcal{D}(I,\mathbf{K})$ est encore noté $\mathcal{D}(I)$.

Définition 1.4 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

Toute fonction $\mathbf{f}$ dérivable sur I dont la dérivée $\mathbf{f}'$ est continue sur I est dite *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans E est noté $\mathcal{C}^1(I,E)$; $\mathcal{C}^1(I,\mathbf{K})$ se note aussi $\mathcal{C}^1(I)$.

2 Opérations

2.1 Linéarité de la dérivation

Comme pour les applications numériques, la dérivation est linéaire ; plus précisément :

Théorème 2.1 (Linéarité de la dérivation).

$\mathcal{D}(I,E)$ et $\mathcal{C}^1(I,E)$ sont des espaces vectoriels et l'application D *de $\mathcal{D}(I,E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,E)$) vers $\mathcal{F}(I,E)$ (resp. $\mathcal{C}(I,E)$) qui à $\mathbf{f}$ associe $\mathbf{f}'$ est linéaire.*

Preuve. Soient $a \in I$, $(\mathbf{f},\mathbf{g}) \in \big(\mathcal{D}(I,E)\big)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$; pour $t \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-a}\Big((\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})(t)-(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})(a)\Big) &= \lambda\frac{1}{t-a}\big(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)\big)+\mu\frac{1}{t-a}\big(\mathbf{g}(t)-\mathbf{g}(a)\big)\\ &\xrightarrow[t\to a,\ t\in I\setminus\{a\}]{} \lambda\mathbf{f}'(a)+\mu\mathbf{g}'(a)\end{aligned}$$

Ceci montre que $(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})'(a) = \lambda\mathbf{f}'(a)+\mu\mathbf{g}'(a)$, implique la linéarité de D puisque le raisonnement est valable pour tout $a \in I$, et donne la stabilité de $\mathcal{D}(I,E)$ par combinaison linéaire.

Si $\mathbf{f}'$ et $\mathbf{g}'$ sont continues, $(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})' = \lambda\mathbf{f}'+\mu\mathbf{g}'$ est continue et $\mathcal{C}^1(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,E)$. cqfd

2.2 Composantes d'une dérivée

On munit l'espace vectoriel E de dimension finie $p \geqslant 1$ d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$; toute application $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, E)$ s'écrit :

$$\forall t \in I,\ \mathbf{f}(t) = \sum_{j=1}^{p} f_j(t)\mathbf{e}_j$$

Rappelons-nous que les composantes du vecteur vitesse sont les dérivées des composantes du mouvement (dans un repère galiléen), ce qui nous motive pour le :

Théorème 2.2 (Composantes d'une dérivée).
$\mathbf{f}$ *est dérivable sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) si, et seulement si, ses composantes f_j relatives à une base de E sont dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) et dans ce cas :*

$$\forall t \in I,\ \mathbf{f}'(t) = \sum_{j=1}^{p} f_j'(t)\mathbf{e}_j$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème sur les composantes d'une limite. Soient $a \in I$ et $t \in I \setminus \{a\}$, le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t-a}\Big(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)\Big) = \sum_{j=1}^{p} \frac{f_j(t) - f_j(a)}{t-a}\mathbf{e}_j$$

admet une limite en a si, et seulement si, ses composantes admettent des limites en a.
$\mathbf{f}' = \sum_{j=1}^{p} f_j'\mathbf{e}_j$ est continue si, et seulement si, les composantes f_j' le sont. cqfd

Corollaire (Cas des fonctions complexes). *Soit f une fonction numérique complexe sur I ; les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I ;
(ii) $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sont dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I ;
(iii) $\overline{f}$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I.

Dans ce cas, $\mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(\Re\mathrm{e}\, f) + \mathrm{i}\,\mathrm{D}(\Im\mathrm{m}\, f)$ *et* $\mathrm{D}(\overline{f}) = \overline{\mathrm{D}\, f}$.

Preuve. $f = \Re\mathrm{e}(f) + \mathrm{i}\,\Im\mathrm{m}(f)$ et $\overline{f} = \Re\mathrm{e}(f) - \mathrm{i}\,\Im\mathrm{m}(f)$ donnent les composantes de f et $\overline{f}$. cqfd

Corollaire (Dérivée de l'inverse d'une fonction).
Soit $f \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I)$) ; si f ne s'annule pas, $\frac{1}{f} \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I)$) et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Preuve. Le résultat est connu pour les fonctions à valeurs réelles.
Si f est une fonction à valeurs complexes, on pose $f = a + \mathrm{i}b$; alors

$$\frac{1}{f} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

ce qui montre la dérivabilité et :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)' &= \frac{a'(a^2+b^2) - a(2aa' + 2bb')}{(a^2+b^2)^2} + \mathrm{i}\frac{-b'(a^2+b^2) + b(2aa' + 2bb')}{(a^2+b^2)^2} = \cdots \\ &= -\frac{a' + \mathrm{i}b'}{(a+\mathrm{i}b)^2} = -\frac{f'}{f^2}\end{aligned}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $(1/f)' = -f'f^{-2}$ est continue. cqfd

Corollaire (Cas des matrices).

Soit M une application de I dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ qui à t associe la matrice $M(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{i,j}$; les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) *M est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I ;*
(ii) *pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, p]\!]$, les $a_{i,j}$ sont des fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I.*

Dans ce cas, pour tout $t \in I$, $M'(t)$ est la matrice $\big(a'_{i,j}(t)\big)_{i,j}$.

Preuve.
Les fonctions $a_{i,j}$ sont les composantes de M dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. cqfd

Corollaire (Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle).

*Soient I un **intervalle** et $\mathbf{f}$ une fonction à valeurs dans E, continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I ; alors $\mathbf{f}$ est constante sur I si, et seulement si, $\mathbf{f}'$ est nulle sur l'intérieur de I.*

Preuve. La propriété est vraie pour les fonctions numériques réelles : c'est une conséquence du théorème des accroissements finis (voir le cours de première année). Puisqu'une fonction est constante si, et seulement si, ses composantes sont constantes, la propriété est vraie pour les fonctions à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, donc aussi pour les fonctions à valeurs complexes et, plus généralement, pour les fonctions à valeurs dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. cqfd

2.3 Composition avec une application numérique

Théorème 2.3 (Dérivée d'une fonction composée).

Soient $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, E)$) et $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, E)$) tels que $\varphi(J) \subset I$; alors $\mathbf{f} \circ \varphi$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur J et :

$$(\mathbf{f} \circ \varphi)' = \varphi'(\mathbf{f}' \circ \varphi)$$

Preuve. Le théorème est vraie pour les fonctions à valeurs réelles ; il est vrai pour les composantes $f_j \circ \varphi$ de $\mathbf{f} \circ \varphi = \sum_{j=1}^{p} (f_j \circ \varphi)\mathbf{e}_j$. Ce théorème est donc vrai pour $\mathbf{f}$. cqfd

Corollaire (Dérivée d'une fonction paire, impaire).

La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire ; la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

Preuve. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(I, E)$. Si $\mathbf{f}$ est paire, alors $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(-t)$ pour tout $t \in I$ et par dérivation :

$$\forall t \in I,\ \mathbf{0} = \frac{d}{dt}\big(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(-t)\big) = \mathbf{f}'(t) + \mathbf{f}'(-t) \tag{2.1}$$

ce qui montre l'imparité de $\mathbf{f}'$. La démonstration est identique pour les fonctions impaires. cqfd

Corollaire (Dérivée d'une fonction périodique).

La dérivée d'une fonction périodique est périodique de même période.

Preuve. Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}, E)$ une fonction T-périodique ; alors $\mathbf{f}(t + T) = \mathbf{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et, par dérivation, on obtient :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \mathbf{0} = \frac{d}{dt}\big(\mathbf{f}(t + T) - \mathbf{f}(t)\big) = \mathbf{f}'(t + T) - \mathbf{f}'(t)$$

ce qui montre que $\mathbf{f}'$ est périodique de période T. cqfd

2.4 Composition avec une application linéaire

Théorème 2.4 (Composition avec une application linéaire).
Soient $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(I, E)$ *(resp.* $\mathcal{C}^1(I)$*) et* $\mathbf{u} \in \mathcal{L}(E, F)$ *une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie ; alors* $\mathbf{u} \circ \mathbf{f}$ *est dérivable (resp. de classe* $\mathcal{C}^1$*) et :*

$$(\mathbf{u} \circ \mathbf{f})' = \mathbf{u} \circ \mathbf{f}'$$

PREUVE. Puisque $\mathbf{u}$ est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\mathbf{u}$ est continue (et même lipschitzienne). Pour $a \in I$ et $t \in I \setminus \{a\}$, on a :

$$\frac{1}{t-a}\Big(\mathbf{u}\big(\mathbf{f}(t)\big) - \mathbf{u}\big(\mathbf{f}(a)\big)\Big) = \mathbf{u}\Big(\frac{1}{t-a}\big(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)\big)\Big) \underset{\substack{t \to a \\ t \in I\setminus\{a\}}}{\longrightarrow} \mathbf{u}\big(\mathbf{f}'(a)\big) \tag{2.2}$$

car $\mathbf{f}$ est dérivable en a et $\mathbf{u}$ continue.

Si $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $(\mathbf{u} \circ \mathbf{f})' = \mathbf{u} \circ \mathbf{f}'$ est continue. cqfd

2.5 Composition avec une application bilinéaire

Calculer la dérivée d'un produit, d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel : toutes ces opérations sont des cas particuliers d'un résultat général :

Théorème 2.5 (Composition avec une application bilinéaire).
Soient E_1*,* E_2 *et* F *trois* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie,* B *une application bilinéaire de* $E_1 \times E_2$ *dans* F*,* $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(I, E_1)$ *(resp.* $\mathcal{C}^1(I, E_1)$*) et* $\mathbf{g} \in \mathcal{D}(I, E_2)$ *(resp.* $\mathcal{C}^1(I, E_2)$*) ; alors l'application* $\mathbf{h} : t \in I \mapsto B\big(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\big)$ *est dérivable (resp. de classe* $\mathcal{C}^1$*) sur* I *et :*

$$\mathbf{h}'(t) = \frac{d}{dt}\Big(B\big(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\big)\Big) = B\big(\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t)\big) + B\big(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t)\big)$$

PREUVE. Les espaces vectoriels E_1, E_2 et F étant de dimension finie, l'application bilinéaire B est continue.

Soit $a \in I$; la bilinéarité de B donne l'égalité :

$$\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}(a) = B\big(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a), \mathbf{g}(a)\big) + B\big(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(a)\big)$$

et, pour $t \in I \setminus \{a\}$, le taux d'accroissement de $\mathbf{h}$ s'écrit :

$$\frac{\mathbf{h}(t) - \mathbf{h}(a)}{t-a} = B\left(\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)}{t-a}, \mathbf{g}(a)\right) + B\left(\mathbf{f}(t), \frac{\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(a)}{t-a}\right) \tag{2.3}$$

Puisque $\mathbf{f}$ est dérivable en a, donc continue en a, et B continue, on obtient en passant à la limite sur t :

$$B\left(\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)}{t-a}, \mathbf{g}(a)\right) \underset{t \to a}{\longrightarrow} B\big(\mathbf{f}'(a), \mathbf{g}(a)\big) \tag{2.4}$$

$$B\left(\mathbf{f}(t), \frac{\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(a)}{t-a}\right) \underset{t \to a}{\longrightarrow} B\big(\mathbf{f}(a), \mathbf{g}'(a)\big) \tag{2.5}$$

ce qui donne la formule annoncée.

Si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, la continuité de $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$ et B assure la continuité de $\mathbf{h}'$. cqfd

Corollaire (Produit de n fonctions numériques).
Si les fonctions à valeurs complexes f_1*,* f_2*,...,* f_n *sont dérivables (resp. de classe* $\mathcal{C}^1$*) sur* I*, leur produit* $\prod_{k=1}^n f_k$ *est dérivable (resp. de classe* $\mathcal{C}^1$*) sur* I *et :*

$$\mathrm{D}\Big(\prod_{k=1}^n f_k\Big) = \sum_{k=1}^n \Big(\mathrm{D}(f_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j\Big)$$

PREUVE. Le théorème précédent donne la relation pour $n = 2$ et une récurrence (à écrire) donne le résultat. cqfd

Corollaire (Quotient de deux fonctions numériques).
Soient f et g deux applications numériques dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I ; si g ne s'annule pas *sur I, la fonction f/g est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et :*

$$\mathrm{D}\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{\mathrm{D}(f)g - f\,\mathrm{D}(g)}{g^2}$$

PREUVE. Il suffit de remarquer que $f/g = f(1/g)$, ce qui est parfois une excellente méthode de dérivation, et d'appliquer la dérivation d'un produit et d'un inverse.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, $(f'g - fg')g^{-2}$ est continue. cqfd

Corollaire (Produit d'une fonction vectorielle et d'une fonction scalaire).
Soient $\varphi \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I)$) et $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(I, E)$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, E)$) ; alors $\varphi\mathbf{f}$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et :

$$\mathrm{D}(\varphi\,\mathbf{f}) = (\mathrm{D}\,\varphi)\mathbf{f} + \varphi(\mathrm{D}\,\mathbf{f})$$

PREUVE. Utilisation de la bilinéarité de $(\lambda, \mathbf{v}) \in \mathbf{K} \times E \mapsto \lambda\mathbf{v} \in E$.
Si φ et $\mathbf{f}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathrm{D}(\varphi\,\mathbf{f}) = (\mathrm{D}\,\varphi)\mathbf{f} + \varphi\,\mathrm{D}(\mathbf{f})$ est continue. cqfd

Corollaire (Produit scalaire).
Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ deux fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I à valeurs dans un espace euclidien E ; alors $\langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g} \rangle$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et :

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{f}(t) \mid \mathbf{g}(t) \rangle = \langle \mathbf{f}'(t) \mid \mathbf{g}(t) \rangle + \langle \mathbf{f}(t) \mid \mathbf{g}'(t) \rangle$$

Corollaire (Orthogonalité de e et e′ si e est unitaire).
Soit $\mathbf{e}$ une fonction dérivable sur I à valeurs dans un espace euclidien E ; si pour tout $t \in I$, $\mathbf{e}(t)$ est unitaire, $\mathbf{e}(t)$ et $\mathbf{e}'(t)$ sont orthogonaux.

PREUVE. Pour tout $t \in I$, $1 = \|\mathbf{e}(t)\|_2^2 = \langle \mathbf{e}(t) \mid \mathbf{e}(t) \rangle$; par dérivation, on obtient :

$$0 = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{e}(t) \mid \mathbf{e}(t) \rangle = \langle \mathbf{e}'(t) \mid \mathbf{e}(t) \rangle + \langle \mathbf{e}(t) \mid \mathbf{e}'(t) \rangle = 2\langle \mathbf{e}'(t) \mid \mathbf{e}(t) \rangle \tag{2.6}$$

ce qui montre l'orthogonalité de $\mathbf{e}'(t)$ avec $\mathbf{e}(t)$ pour tout $t \in I$.

L'interprétation mécanique est évidente : le support de la trajectoire de $\mathbf{e}(t)$ est le cercle de centre $\mathbf{0}$ et de rayon 1 ; le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire dont orthogonal au rayon vecteur. cqfd

Corollaire (Produit vectoriel).
Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ deux fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I à valeurs dans un espace euclidien orienté E de dimension trois ; alors $\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et :

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{f}(t) \wedge \mathbf{g}(t)\Big) = \mathbf{f}'(t) \wedge \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \wedge \mathbf{g}'(t)$$

Corollaire (Produit matriciel).
Soient A et B deux applications dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$)de I à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ alors AB est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et :

$$(AB)' = A'B + AB'$$

Remarque. Attention ! Dans les deux derniers exemples, la multiplication n'est pas commutative ; il faut donc ne pas changer l'ordre des facteurs.

3 Dérivées d'ordre supérieur

Cette section permet d'envisager les dérivées d'ordre $k > 1$ et d'étudier les différentes opérations algébriques qui s'y rapportent.

3.1 Généralités

Définition 3.1 (Dérivée d'ordre k).
Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, E)$; les dérivées successives de $\mathbf{f}$ sont définies par récurrence ; on pose $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}$ et $\mathbf{f}$ est k *fois dérivable* si, et seulement si, $\mathbf{f}^{(k-1)}$ est dérivable. La dérivée k^{e}ou dérivée d'ordre k de $\mathbf{f}$ est notée aussi $\mathrm{D}^k(\mathbf{f})$.
L'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I à valeurs dans E se note $\mathcal{D}^k(I, E)$; $\mathcal{D}^k(I, \mathbf{K})$ est encore noté $\mathcal{D}^k(I)$.

On a donc les relations :

$$\mathbf{f}^{(j)} = (\mathbf{f}')^{(j-1)} = \left(\mathbf{f}^{(j-1)}\right)' = \left(\mathbf{f}^{(j-k)}\right)^{(k)}$$

Définition 3.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).
Une fonction k fois dérivable est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si, et seulement si, sa dérivée d'ordre k est continue sur I.
Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ ou, ce qui est équivalent, si, et seulement si, elle est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbf{N}$.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans E est noté $\mathcal{C}^k(I, E)$; $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{K})$ est encore noté $\mathcal{C}^k(I)$.

3.2 Exemples

Soit $a \in \mathbf{C}$;

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{a\},\ \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{t-a}\right) = \frac{(-1)^k k!}{(t-a)^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{a-t}\right) = \frac{k!}{(a-t)^{k+1}}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \forall t \in \mathbf{R},\ \frac{d^k}{dt^k}\Big\{(t-a)^n\Big\} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}(t-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \mathrm{D}^k(\cos)(t) = \cos\Big(t + k\frac{\pi}{2}\Big),\ \mathrm{D}^k(\sin)(t) = \sin\Big(t + k\frac{\pi}{2}\Big)}$$

$$\boxed{\mathrm{D}^k(\exp) = \exp}$$

$$\boxed{\mathrm{D}^{2k}(\mathrm{ch}) = \mathrm{ch},\ \mathrm{D}^{2k+1}(\mathrm{ch}) = \mathrm{sh},\ \mathrm{D}^{2k}(\mathrm{sh}) = \mathrm{sh},\ \mathrm{D}^{2k+1}(\mathrm{sh}) = \mathrm{ch}}$$

La dérivée d'ordre k d'une fraction rationnelle se calcule en la décomposant en éléments simples sur $\mathbf{C}$, puis en déterminant la dérivée d'ordre k de chaque éléments simples.

3.3 Opérations

3.3.1 Linéarité de la dérivée d'ordre k

Théorème 3.1. *Pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{D}^k(I,E)$ et $\mathcal{C}^k(I,E)$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$:*

$$\mathrm{D}^j(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}) = \lambda\,\mathrm{D}^j(\mathbf{f}) + \mu\,\mathrm{D}^j(\mathbf{g})$$

Preuve. Démonstration par récurrence sur j en utilisant :
$\mathrm{D}^{j+1}(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}) = \big(\mathrm{D}^j(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g})\big)' = \big(\lambda\,\mathrm{D}^j(\mathbf{f})+\mu\,\mathrm{D}^j(\mathbf{g})\big)' = \lambda\,\mathrm{D}^{j+1}(\mathbf{f})+\mu\,\mathrm{D}^{j+1}(\mathbf{g})$ cqfd

3.3.2 Dérivée d'ordre k d'un produit

Théorème 3.2 (Formule de Leibniz).
Le produit $\varphi\,\mathbf{f}$ de deux fonctions $\mathcal{C}^k$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ et :

$$(\varphi\,\mathbf{f})^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \mathsf{C}_k^j \varphi^{(j)}\mathbf{f}^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{k} \mathsf{C}_k^j \varphi^{(k-j)}\mathbf{f}^{(j)}$$

Preuve. Démonstration par récurrence sur k.
La propriété a été démontrée pour $k=1$. On la suppose vraie au rang k ; il nous faut la démontrer au rang $k+1$.

$$\begin{aligned}
(\varphi\mathbf{f})^{(k+1)} &= \big((\varphi\mathbf{f})^{(k)}\big)' = \Big(\sum_{j=0}^{k} \mathsf{C}_k^j \varphi^{(j)}\mathbf{f}^{(k-j)}\Big)' \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathsf{C}_k^j \Big(\varphi^{(j)}\mathbf{f}^{(k-j)}\Big)' && \text{(linéarité de la dérivation)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathsf{C}_k^j \Big(\varphi^{(j+1)}\mathbf{f}^{(k-j)} + \varphi^{(j)}\mathbf{f}^{(k-j+1)}\Big) && \text{(dérivée d'un produit)} \\
&= \sum_{r=1}^{k+1} \mathsf{C}_k^{r-1} \varphi^{(r)}\mathbf{f}^{(k-r+1)} + \sum_{j=0}^{k} \mathsf{C}_k^j \varphi^{(j)}\mathbf{f}^{(k-j+1)} && \text{(en posant } r=j+1\text{)} \\
&= \mathsf{C}_k^0 \varphi^{(0)}\mathbf{f}^{(k+1)} + \sum_{r=1}^{k}\Big(\mathsf{C}_k^{r-1}+\mathsf{C}_k^r\Big)\varphi^{(r)}\mathbf{f}^{(k+1-r)} + \mathsf{C}_k^k\varphi^{(k+1)}\mathbf{f}^{(0)} \\
&= \sum_{r=0}^{j+1} \mathsf{C}_{k+1}^r \varphi^{(r)}\mathbf{f}^{(k+1-r)}
\end{aligned}$$

car $\mathsf{C}_k^0 = \mathsf{C}_k^k = 1 = \mathsf{C}_{k+1}^0 = \mathsf{C}_{k+1}^{k+1}$ et l'algorithme fondamental du triangle de Pascal donne :

$$\forall r \in [\![1,k]\!],\ \mathsf{C}_k^{r-1} + \mathsf{C}_k^r = \mathsf{C}_{k+1}^r$$

On remarque que la dérivée d'ordre j de $\varphi\,\mathbf{f}$ est continue sur I. cqfd

Corollaire. *$\mathcal{C}^k(I)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre.*

Preuve. La multiplication est stable sur $\mathcal{C}^k(I)$, la fonction constante 1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$; $\mathcal{C}^k(I)$ est donc une sous-algèbre de $\mathcal{C}(I)$. cqfd

3.3.3 Inverse

Théorème 3.3 (Inverse d'une fonction $\mathcal{C}^k$).
L'inverse $1/f$ d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^k$ qui ne s'annule pas sur I, est de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve. Démonstration par récurrence sur k.
La propriété a déjà été démontrée pour $k = 1$. On la suppose vraie au rang k. Si f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, la dérivée $(1/f)' = -f'/f^2 = f' \times (1/f) \times (1/f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ comme produit de trois fonctions $\mathcal{C}^k$, et donc $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. cqfd

Corollaire (Quotient de fonctions $\mathcal{C}^k$). *Si f et g sont deux fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^k$ et si g ne s'annule pas sur I, f/g est de classe $\mathcal{C}^k$.*

3.3.4 Composition

Théorème 3.4 (Composition de fonctions $\mathcal{C}^k$). *La composée $\mathbf{f} \circ \varphi$ d'une application $\mathbf{f}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.*

Preuve. Démonstration par récurrence sur k.
La propriété a déjà été démontrée pour $k = 1$. On la suppose vraie au rang k. Si $\mathbf{f}$ et φ sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, la dérivée $(\mathbf{f} \circ \varphi)' = \varphi'(\mathbf{f}' \circ \varphi)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ comme produit et composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, et $\mathbf{f} \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. cqfd

3.4 Difféomorphisme

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Rappelons que si J est un intervalle (non réduit à un point) et φ une fonction *continue* et *strictement monotone*,
- $I = \varphi(J)$ est un intervalle de même nature que J ;
- φ réalise une bijection de J sur I ;
- l'application réciproque φ^{-1} est continue et de même sens de monotonie que φ.

On dit alors que φ réalise un *homéomorphisme* de J sur I.

Rappelons encore que si φ est un homéomorphisme de J sur I dérivable en un point u de J, φ^{-1} est dérivable en $a = \varphi(u)$ si, et seulement si, $\varphi'(u) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\big(\varphi^{-1}\big)'(a) = \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(a)\big)}$$

Ainsi, si φ est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de J sur I et si φ' ne s'annule pas sur J, φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I puisque $t \mapsto \big(\varphi^{-1}\big)'(t) = 1/\big(\varphi'(\varphi^{-1}(t))\big)$ est continue.

Définition 3.3 ($\mathcal{C}^k$-difféomorphisme).
Une application φ est un $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme* de J sur I si φ réalise une bijection de J sur I et si φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 3.5 (Caractérisation des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes).
Soit J un intervalle non réduit à un point ; φ réalise un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ si, et seulement si, φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et φ' ne s'annule pas sur J.

Preuve.
$\boxed{\Longrightarrow}$ C'est une conséquence de la définition, l'existence de la dérivée de φ^{-1} impliquant la non nullité de φ' sur J.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Démonstration par récurrence sur k. Puisque φ' est une fonction continue qui ne s'annule pas sur l'intervalle J, φ' est de signe constant sur J et φ est une fonction strictement monotone ; φ réalise

donc un homéomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ et $(\varphi^{-1})' = 1/\big(\varphi' \circ \varphi^{-1}\big)$ ce qui assure la continuité de $(\varphi^{-1})'$ et montre que la propriété est vraie pour $k = 1$.

Supposons la propriété vraie au rang k. Soit φ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$; en particulier φ de classe $\mathcal{C}^k$ et, puisque φ' ne s'annule pas, φ réalise un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ entre J et $\varphi(J)$; le calcul de $(\varphi^{-1})' = 1/\big(\varphi' \circ \varphi^{-1}\big)$ montre que $(\varphi^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et donc montre que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. cqfd

3.5 Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Généralisons la définition des fonctions continues par morceaux aux fonctions dérivables et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

3.5.1 Définition

Définition 3.4 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux).

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$; $\mathbf{f}$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ *par morceaux* sur le segment $[a,b]$, si, et seulement si, il existe une subdivision $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que la restriction de $\mathbf{f}$ à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge à une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E sont notées $\mathcal{C}^k\mathcal{M}([a,b],E)$; $\mathcal{C}^k\mathcal{M}([a,b],\mathbf{K})$ est encore noté $\mathcal{CM}([a,b])k$.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle quelconque si, et seulement si, sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

3.5.2 Dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Si $\mathbf{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur le segment $[a,b]$, ses dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont définies sur $[a,b]$ privé des points d'une partie finie, points d'une subdivision subordonnée à $\mathbf{f}$. On notera $\mathrm{D}^j\,\mathbf{f}$ la dérivée d'ordre j et on pourra la prolonger par $\mathbf{0}$ aux points de la subdivision pour en faire une fonction continue par morceaux.

Caractérisons les fonctions $\mathbf{f}$ de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux qui admettent une dérivée $\mathrm{D}\,\mathbf{f}$ égale à $\mathbf{0}$. On a les propositions suivantes :

Proposition 3.6 (Caractérisation des fonctions en escalier).

Si $\mathbf{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur le segment* $[a,b]$*,* $\mathbf{f}$ *est en escalier si, et seulement si,* $\mathrm{D}\,\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Preuve. Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision subordonnée à $\mathbf{f}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la restriction de $\mathbf{f}$ à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ est constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle sur cet intervalle. cqfd

Proposition 3.7 (Caractérisation des fonctions constantes sur un segment).

Si $\mathbf{f}$ *est* continue *sur le segment* $[a,b]$ *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $[a,b]$*,* $\mathbf{f}$ *est constante si, et seulement si,* $\mathrm{D}\,\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Preuve. Les seules fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui sont continues sur $[a,b]$ sont les fonctions constantes. cqfd

Proposition 3.8 (Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle).

Si $\mathbf{f}$ *est* continue *sur l'intervalle* I *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* I*,* $\mathbf{f}$ *est constante si, et seulement si,* $\mathrm{D}\,\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Preuve. Appelons $([a_n, b_n])_n$ une suite croissante pour l'inclusion de segments emboîtés dont la réunion est I. $\mathbf{f}$ est constante sur I si, et seulement si, $\mathbf{f}$ est constante sur chaque $[a_n, b_n]$, puisque les segments sont inclus les uns dans les autres, et $\mathbf{f}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est constante sur chaque $[a_n, b_n]$ si, et seulement si, $\mathrm{D}\,\mathbf{f}$ est nulle sur chaque $[a_n, b_n]$, donc sur chaque segment de I. cqfd

Chapitre 8

Série de Fourier

Sommaire

1 Série trigonométrique

1.1 Qu'est-ce qu'une série trigonométrique ?

Définition 1.1 (Série trigonométrique).
On appelle *série trigonométrique* toute série de fonctions (particulières)

$$c_0 + \sum_{n\geqslant 1}(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int}) \quad \text{ou} \quad \sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

où $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites de nombres complexes.

Remarque. Rappelons que $c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int} = (c_n + c_{-n})\cos nt + i(c_n - c_{-n})\sin nt$, ce qui permet de passer des c_n aux a_n et b_n.

1.2 Caractérisation des séries trigonométriques qui convergent normalement sur R

Théorème 1.1 (Convergence normale sur R des séries trigonométriques).
Soit $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int})$ une série trigonométrique ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la série $\sum(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int})$ converge normalement sur $\mathbf{R}$;
(ii) les séries $\sum|c_n|$ et $\sum|c_{-n}|$ sont convergentes ;
(iii) les séries $\sum|a_n|$ et $\sum|b_n|$ sont convergentes.

Preuve.

$(i) \implies (ii)$ On pose $u_n(t) = c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int}$; alors,

$$2\pi\,|c_n| = \Big|\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(t)|\,|\mathrm{e}^{-int}|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\|u_n\|_\infty$$

soit $|c_n| \leqslant \|u_n\|_\infty$, d'où la convergence de la série $\sum|c_n|$.
De même, $|c_{-n}| \leqslant \|u_n\|_\infty$, d'où la convergence de la série $\sum|c_{-n}|$;

$(ii) \implies (iii)$ $|a_n| = |c_n + c_{-n}| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$ et $|b_n| = \big|\mathrm{i}(c_n - c_{-n})\big| \leqslant |c_n| + |c_{-n}|$; par comparaison, les séries $\sum|a_n|$ et $\sum|b_n|$ sont convergentes ;

$(iii) \implies (i)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\big|u_n(t)\big| = |a_n \cos nt + b_n \sin nt| \leqslant |a_n| + |b_n|$, et, en passant à la borne supérieure pour $t \in \mathbf{R}$, $\|u_n\|_\infty \leqslant |a_n| + |b_n|$, ce qui assure la convergence normale sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n$. cqfd

1.3 Calcul des coefficients c_k

Théorème 1.2. *Si la série trigonométrique $\sum(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int})$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$, alors : $S : t \mapsto c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int}) = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{ikt}$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$ et*

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ c_k = \langle e_k \mid S\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)\,\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

Preuve. La continuité des fonctions u_n et la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de la série $\sum u_n$ montrent la continuité de la somme S ; puisque les u_n sont 2π-périodiques, S est 2π-périodique.

$S(t)\,\mathrm{e}^{-ikt} = c_0\,\mathrm{e}^{-ikt} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int})\,\mathrm{e}^{-ikt}$ est la somme d'une série uniformément convergente sur $\mathbf{R}$ car

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{n=p+1}^{\infty}(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int})\,\mathrm{e}^{-ikt}\Big| = \sup_{t\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{n=p+1}^{\infty}(c_n \,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-int})\Big| \xrightarrow[p]{} 0 \tag{1.2}$$

On peut donc intégrer la série terme à terme sur le segment $[-\pi, \pi]$ et on obtient :

$$\langle e_k \mid S \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_0 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (c_n \, \mathrm{e}^{-int} + c_{-n} \, \mathrm{e}^{-int}) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

$$= \begin{cases} 0 \quad + \quad c_k & \text{si } k \neq 0 \\ c_0 \quad + \quad 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

car toutes les intégrales sont nulles sauf pour $n = k$. cqfd

Remarque. La convergence des séries numériques $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ ou des séries numériques $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ impliquent la convergence normale sur $\mathbf{R}$, donc uniforme sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n$.

2 Coefficients de Fourier

2.1 Fonctions complexes 2π-périodiques et continues par morceaux

Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux est noté $\mathcal{CM}_{2\pi}$. De telles fonctions sont bornées et on peut se restreindre à un intervalle de longueur 2π pour en déterminer les bornes (cas réel).

$$\forall f \in \mathcal{CM}_{2\pi}, \ \|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}} \bigl|f(t)\bigr| = \sup_{t \in [a, a+2\pi]} \bigl|f(t)\bigr|$$

La donnée d'une fonction g continue par morceaux sur un segment $[a, a + 2\pi]$ de longueur 2π définit une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux en posant

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in [a, a + 2\pi[\\ g(t - 2n\pi) & \text{si } t \in [a + 2n\pi, a + 2n\pi + 2\pi[\end{cases}$$

L'intégrale sur une période d'une fonction périodique est *indépendante* de la période choisie ; on prendra $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$ ou d'autres segments suivant le cas. On note

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f} g, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2}, \quad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|$$

L'utilisation d'un changement de variable (ou d'échelle) permet de passer d'une fonction T-périodique à une fonction 2π-périodique ; pour cela, on note $\omega = 2\pi T^{-1}$ la pulsation et

- si h est une fonction T-périodique, alors $f : t \mapsto h\bigl(T/(2\pi)\, t\bigr) = h(\omega^{-1} t)$ est une fonction 2π-périodique ;
- si f est une fonction 2π-périodique, alors $h : t \mapsto f\bigl(2\pi/T\, t\bigr) = f(\omega\, t)$ est une fonction T-périodique.

2.2 Coefficients de Fourier d'une fonction

Définitions 2.1 (Coefficient de Fourier).

Si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, on pose

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{Z}, \ \hat{f}(n) = c_n(f) = \langle e_n \mid f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \ a_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, \mathrm{d}t}$$

Le coefficient noté $c_n(f)$ ou $\hat{f}(n)$ est appelé *coefficient exponentiel de Fourier d'ordre* n de f ; les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les *coefficients trigonométriques* de f.

Remarques.
$c_0(f) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la *valeur moyenne de f sur une période.*
$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = \mathrm{i}\big(c_n(f) - c_{-n}(f)\big)$.
Attention ! $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

2.3 Propriétés des coefficients de Fourier

Proposition 2.1 (Linéarité par rapport à la fonction).
Pour tout entier n, c_n, a_n et b_n sont des formes linéaires sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$, i.e., *par exemple :*

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ \forall (f,g) \in (\mathcal{CM}_{2\pi})^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2,\ c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$$

Ainsi, $f \mapsto \hat{f}$ est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ vers $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$.

Preuve. La linéarité de l'intégrale donne la solution :

$$\begin{aligned} c_n(\lambda f + \mu g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, \mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}t \\ &= \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}t + \mu \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}t = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g) \end{aligned}$$

cqfd

Proposition 2.2 (Conjugaison).

$$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)},\ a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)},\ b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$$

Si f est une fonction à valeurs réelles, $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$ et les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont des nombres réels.

Preuve. L'intégrale du conjugué d'une fonction est le conjugué de l'intégrale :

$$\begin{aligned} c_n(\overline{f}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\, \mathrm{e}^{-int}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)\, \mathrm{e}^{int}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{int}\ \mathrm{d}t} = \overline{c_{-n}(f)} \\ a_n(\overline{f}) &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t) \cos(nt)}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t} = \overline{a_n(f)} \\ b_n(\overline{f}) &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} \sin(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t) \sin(nt)}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t} = \overline{b_n(f)} \end{aligned}$$

cqfd

Proposition 2.3 (Parité).
Si $\check{f}$ désigne la fonction $t \mapsto f(-t)$, on a

$$c_n(\check{f}) = c_{-n}(f),\ a_n(\check{f}) = a_n(f)\ \text{et}\ b_n(\check{f}) = -b_n(f)$$

Si f est une fonction paire, alors :
$c_{-n}(f) = c_n(f),\ a_n(f) = \dfrac{4}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, \mathrm{d}t$ *et* $b_n(f) = 0$

Si f est une fonction impaire, alors :
$c_{-n}(f) = -c_n(f)$, $a_n(f) = 0$ *et* $b_n(f) = \dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$

Preuve. Le changement de variable $t = -u$ fait l'affaire :

$$\begin{aligned}
c_n(\check{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{inu}\,(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{inu}\,\mathrm{d}u = c_{-n}(f)\\
a_n(\check{f}) &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)\cos(-nu)\,(-\mathrm{d}u) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(nu)\,\mathrm{d}u = a_n(f)\\
b_n(\check{f}) &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)\sin(-nu)\,(-\mathrm{d}u) = \frac{-2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nu)\,\mathrm{d}u = -b_n(f)
\end{aligned}$$

Rappelons que l'on a, pour tout $\alpha > 0$ et toute fonction g continue par morceaux sur le segment $[-\alpha, \alpha]$:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\alpha}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{0} g(-u)\,(-\mathrm{d}u) + \int_{0}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\alpha}\big(g(t)+g(-t)\big)\,\mathrm{d}t \quad (2.1)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\text{la fonction } g \text{ est paire} &\implies \int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t\\
\text{la fonction } g \text{ est impaire} &\implies \int_{-\alpha}^{\alpha} g(t)\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

Si f est une fonction paire, les fonctions f et $\check{f}$ sont égales, $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est une fonction paire et $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est une fonction impaire.

Si f est une fonction impaire, les fonctions f et $\check{f}$ sont opposées, $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est une fonction impaire et $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est une fonction paire. cqfd

Proposition 2.4 (Effet d'une translation).
Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\tau_a f : t \mapsto f(a+t)$; alors

$$c_n(\tau_a f) = \mathrm{e}^{ina}\,c_n(f)$$

Preuve. Les ingrédients : le changement de variable $u = t + a$, la formule fondamentale de l'exponentielle et la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
c_n(\tau_a f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)\,\mathrm{e}^{-in(u-a)}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)\,\mathrm{e}^{ina}\,\mathrm{e}^{-inu}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{ina}\,c_n(f)
\end{aligned}$$

cqfd

Théorème 2.5 (Caractère borné des coefficients de Fourier).
Pour toute fonction f continue et continue par morceaux, $\hat{f}$ est une suite bornée et

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{Z}}\big|\hat{f}(n)\big| = \sup_{n\in\mathbf{Z}}\big|c_n(f)\big| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$$

Preuve. On a les inégalités suivantes :

$$2\pi\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t = 2\pi\,\|f\|_1 \leqslant 2\pi\,\|f\|_\infty$$

Il ne reste plus qu'à passer à la borne supérieure sur $n \in \mathbf{Z}$. cqfd

De même les suites $\big(a_n(f)\big)_n$ et $\big(b_n(f)\big)_n$ des coefficients trigonométriques de Fourier sont bornées :

$$\begin{aligned}\left|a_n(f)\right| &= \left|\hat{f}(n)+\hat{f}(-n)\right| \leqslant \left|\hat{f}(n)\right| + \left|\hat{f}(-n)\right| \leqslant 2\|f\|_1\\ \left|b_n(f)\right| &= \left|\mathrm{i}\big(\hat{f}(n)+\hat{f}(-n)\big)\right| \leqslant \left|\hat{f}(n)\right| + \left|\hat{f}(-n)\right| \leqslant 2\|f\|_1\end{aligned}$$

Lemme 2.6 (de Riemann-Lebesgue).
Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $c_n(f)$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers $+\infty$, i.e.

$$\lim_n c_n(f) = \lim_n c_{-n}(f) = 0 = \lim_n a_n(f) = \lim_n b_n(f)$$

Preuve.
Cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Une intégration par parties permet l'apparition d'un facteur n^{-1} et on remarquera la nullité de la partie intégrée : l'accroissement d'une fonction 2π-périodique entre $-\pi$ et π est nulle. Pour $n \neq 0$ on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = f(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{-\mathrm{i}n}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{\mathrm{i}n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

et

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|}\left|c_n(f')\right| \leqslant \frac{1}{|n|}\|f'\|_1 \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.3}$$

Cas des fonctions en escalier. Soient φ une fonction en escalier, $\sigma = (a_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ une subdivision adaptée, λ_k la valeur (constante) de φ sur l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$; alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p}\int_{a_{k-1}}^{a_k} \lambda_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{\exp(-\mathrm{i}na_k) - \exp(-\mathrm{i}na_{k-1})}{-\mathrm{i}n} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned}|c_n(\varphi)| &= \frac{1}{2\pi|n|}\left|\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\big(\exp(-\mathrm{i}na_k) - \exp(-\mathrm{i}na_{k-1})\big)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi|n|}\sum_{k=1}^{p}|\lambda_k|\,\left|\exp(-\mathrm{i}na_k) - \exp(-\mathrm{i}na_{k-1})\right| \leqslant \frac{1}{2\pi|n|}\sum_{k=1}^{p}2|\lambda_k| \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Cas général. Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$; il existe une fonction en escalier φ_ε sur $[-\pi, \pi]$ telle que $\|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Ainsi

$$|c_n(f)| = |c_n(f-\varphi_\varepsilon) + c_n(\varphi_\varepsilon)| \leqslant |c_n(f-\varphi_\varepsilon)| + |c_n(\varphi_\varepsilon)| \leqslant \|f-\varphi_\varepsilon\|_\infty + |c_n(\varphi_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon + |c_n(\varphi_\varepsilon)|$$

Puisque $\left|c_n(\varphi_\varepsilon)\right| \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, il existe un rang N tel que $|n| > N$ implique $|c_n(\varphi_\varepsilon)| < \varepsilon$, et donc $\left|c_n(f)\right| < 2\varepsilon$, ce qui montre que $\lim_n c_n(f) = \lim_n c_{-n}(f) = 0$.

Les coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients exponentiels $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$; ils admettent donc 0 comme limite. cqfd

2.4 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier et régularité de la fonction

Proposition 2.7 (Coefficient de Fourier d'une dérivée).
Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{Z},\ c_n(f') = \mathrm{i}n\, c_n(f)}$$

Preuve. Une intégration par parties donne le résultat ; la partie intégrée est nulle car accroissement d'une fonction 2π-périodique entre $-\pi$ et π.

$$\begin{aligned}2\pi\, c_n(f') = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(-\mathrm{i}n\,\mathrm{e}^{-int})\,\mathrm{d}t \\ = 0 + \mathrm{i}n \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}n\, c_n(f) \quad (2.6)\end{aligned}$$

cqfd

Proposition 2.8 (Coefficient de Fourier d'une dérivée d'ordre k).
Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}$, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{Z},\ c_n(f^{(k)}) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f)}$$

Preuve. Une récurrence sur k donne le résultat. cqfd

Proposition 2.9 (Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux).
Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{Z},\ c_n(\mathrm{D}^k f) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f)}$$

Preuve. Si f est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, f est une primitive de $\mathrm{D}\, f$, l'intégration par parties est licite et la formule est vraie pour $k = 1$.

Une récurrence sur k donne le résultat. cqfd

Corollaire. *Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux) sur $\mathbf{R}$, alors $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$ quand $|n|$ tend vers l'infini.*

$$c_n(f) \underset{|n|\to\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\frac{1}{|n|^k}\Big)$$

Preuve. Considérons l'égalité $c_n(f) = (\mathrm{i}n)^{-k} c_n(f^{(k)})$ (resp. $c_n(f) = (\mathrm{i}n)^{-k} c_n(\mathrm{D}^k f)$) ; puisque le lemme de Riemann-Lebesgue montre que $c_n(f^{(k)}) \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (resp. $c_n(\mathrm{D}^k f) \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0$), le résultat est démontré. cqfd

2.5 Série de Fourier

2.5.1 Somme partielle de Fourier de rang n

Soient f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux, et n un entier naturel ; pour $t \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\boxed{\begin{aligned}\big[S_n(f)\big](t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\Big(c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\Big)\\ &= c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt\Big)\end{aligned}}$$

Remarque. Si P est un polynôme trigonométrique de degré d, pour tout entier $n \geqslant d$, la somme partielle de Fourier de rang n est identique à P.

2.5.2 Série de Fourier

À toute fonction f 2π-périodique et continue par morceaux, on associe la série de fonctions $c_0(f)+\sum\big(c_n(f)\,\mathrm{e}^{int} + c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-int}\big)$, *i.e.* la série de fonctions $c_0(f)+\sum\big(a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt\big)$; c'est la *série de Fourier* de f. On note $[S(f)](t)$ la somme de la série de Fourier de f au point t en cas de convergence.

$$\boxed{\begin{aligned}\big[S(f)\big](t) &= \lim_{n\uparrow+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = c_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\Big)\\ &= c_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt\Big)\end{aligned}}$$

Se posent maintenant deux questions :

- pour quelles valeurs de t la série de Fourier converge-t-elle ?
- en cas de convergence, quelle est la valeur de la somme de cette série ? en particulier, cette somme est-elle égale à $f(t)$?

3 Convergence en moyenne quadratique

3.1 Inégalité de Bessel

La somme partielle de Fourier d'une fonction f réalise une propriété extrémale qui s'éclaircira avec la notion de projection orthogonale.

Proposition 3.1. *Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $n \in \mathbf{N}$; les coefficients de Fourier $\big(c_k(f)\big)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ de f rendent minimale l'expression $\big\|f - \sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k\big\|_2$,* i.e. *$S_n(f)$ réalise le minimum de $\|f-P\|_2$ pour tous les polynômes trigonométriques P de degré au plus n.*

Preuve. Soit $(\lambda_k)_{k\in[\![-n,n]\!]}$ des nombres complexes ; alors

$$\begin{aligned}
\Big\|f-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k\Big\|_2^2 &= \langle f-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k \mid f-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k\rangle \\
&= \|f\|_2^2-\overline{\langle \sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k \mid f\rangle}-\langle \sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k \mid f\rangle+\Big\|\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e_k\Big\|_2^2 \\
&= \|f\|_2^2-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k\overline{c_k(f)}-\sum_{k=-n}^{n}\overline{\lambda_k}c_k(f)+\sum_{k=-n}^{n}|\lambda|^2 \\
&= \|f\|_2^2+\sum_{k=-n}^{n}\Big\{\big(\lambda_k-c_k(f)\big)\big(\overline{\lambda_k}-\overline{c_k(f)}\big)-|c_k(f)|^2\Big\} \\
&= \|f\|_2^2+\sum_{k=-n}^{n}\big|\lambda_k-c_k(f)\big|^2-\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 \\
&\geqslant \|f\|_2^2-\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2
\end{aligned}$$

l'inégalité ayant lieu si, et seulement si, $\sum_{k=-n}^{n}\big|\lambda_k-c_k(f)\big|^2=0$, *i.e.* si, et seulement si, $\lambda_k=c_k(f)$ pour tout $k\in[\![-n,n]\!]$. cqfd

Ainsi, pour tout polynôme trigonométrique P de degré au plus n, on a :

$$\boxed{\big\|f-P\big\|_2^2\geqslant\big\|f-S_n(f)\big\|_2^2=\big\|f\big\|_2-\sum_{k=-n}^{n}\big|c_k(f)\big|^2=\big\|f\big\|_2^2-\big\|S_n(f)\big\|_2^2}$$

Proposition 3.2 (Inégalité de Bessel).

Si $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$, les sommes $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2$ sont majorées par $\big\|f\big\|_2^2$ et

$$|c_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\big(|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2\big)\leqslant\big\|f\big\|_2^2 \tag{3.1}$$

Preuve. De l'égalité $\big\|f\big\|_2^2=\big\|S_n(f)\big\|_2^2+\big\|f-S_n(f)\big\|_2^2$, on tire

$$\big\|S_n(f)\big\|_2^2=\sum_{k=-n}^{n}\big|c_k(f)\big|^2\leqslant\big\|f\big\|_2^2 \tag{3.2}$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $|c_0|^2+\sum\big(|c_n|^2+|c_{-n}|^2\big)$ sont majorées par $\big\|f\big\|_2^2$; cette série est donc convergente et $\big\|f\big\|_2^2$ est un majorant de sa somme. cqfd

Remarque. Le terme général d'une série *convergente* tend vers 0, ce qui montre que $\lim_n c_n=\lim_n c_{-n}=0$. On retrouve le lemme de Riemann-Lebesgue.

3.2 Convergence en moyenne quadratique de la suite $\big(S_n(f)\big)_n$ vers f

Théorème 3.3 (Cas des fonctions continues).

Si f est une fonction continue *et 2π-périodique, la suite $\big(S_n(f)\big)_n$ converge en moyenne quadratique vers la fonction f, autrement dit :*

$$\big\|f-S_n(f)\big\|_2\xrightarrow[n]{}0 \tag{3.3}$$

Preuve. La fonction f étant continue et 2π-périodique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P_ε tel que $\|f - P_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$. Pour tout entier n supérieur au degré de P_ε, on a :

$$\big\|f - S_n(f)\big\|_2 \leqslant \big\|f - P_\varepsilon\big\|_2 \leqslant \big\|f - P_\varepsilon\big\|_\infty < \varepsilon \tag{3.4}$$

cqfd

Corollaire (Extension aux fonctions continues par morceaux).
Si f est une fonction continue par morceaux et 2π-périodique, la suite $\big(S_n(f)\big)_n$ converge en moyenne quadratique vers la fonction f, autrement dit :

$$\big\|f - S_n(f)\big\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{3.5}$$

Preuve. La fonction f étant continue par morceaux et 2π-périodique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g_ε *continue* et 2π-périodique telle que $\|f - g_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
\big\|f - S_n(f)\big\|_2 &= \big\|f - g_\varepsilon + g_\varepsilon - S_n(g_\varepsilon) + S_n(g_\varepsilon) - S_n(f)\big\|_2 \\
&\leqslant \big\|f - g_\varepsilon\big\|_2 + \big\|g_\varepsilon - S_n(g_\varepsilon)\big\|_2 + \big\|S_n(g_\varepsilon - f)\big\|_2 \\
&\leqslant \big\|f - g_\varepsilon\big\|_2 + \big\|g_\varepsilon - S_n(g_\varepsilon)\big\|_2 + \big\|g_\varepsilon - f\big\|_2 \\
&< 2\varepsilon + \big\|g_\varepsilon - S_n(g_\varepsilon)\big\|_2
\end{aligned}$$

Puisque $\big\|g_\varepsilon - S_n(g_\varepsilon)\big\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0$, pour n suffisamment grand, $\big\|f - S_n(f)\big\|_2 < 3\varepsilon$. cqfd

Théorème 3.4 (Égalité de Parseval).
Si f est une fonction continue par morceaux et 2π-périodique, on a :

$$\boxed{\big\|f\big\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\big) = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big)}$$

Preuve.
De $\big\|f\big\|_2^2 - \big\|S_n(f)\big\|_2^2 = \big\|f - S_n(f)\big\|_2^2 \underset{n}{\longrightarrow} 0$, on tire $\big\|S_n(f)\big\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 \underset{n}{\longrightarrow} \big\|f\big\|_2^2$.
$2c_n = a_n - \mathrm{i}\,b_n$ implique $4|c_n|^2 = (a_n - \mathrm{i}\,b_n)(\overline{a_n} + \mathrm{i}\,\overline{b_n}) = |a_n|^2 - \mathrm{i}\,\overline{a_n}b_n + \mathrm{i}\,a_n\overline{b_n} + |b_n|^2$; de même, $4|c_{-n}|^2 = |a_n|^2 + \mathrm{i}\,\overline{a_n}b_n - \mathrm{i}\,a_n\overline{b_n} + |b_n|^2$; ainsi $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big)/2$. cqfd

Proposition 3.5 (Expression du produit scalaire).
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques, alors :

$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f}g = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k(f)}\,c_k(g) = \overline{c_0(f)}\,c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\overline{c_n(f)}\,c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}\,c_{-n}(g)\Big)$$

Preuve. Puisque $S_n(f) \underset{n}{\longrightarrow} f$ et $S_n(g) \underset{n}{\longrightarrow} g$ pour la norme $\|\ \|_2$, on obtient :

$$\langle S_n(f) \mid S_n(g)\rangle \underset{n}{\longrightarrow} \langle f \mid g\rangle$$

Or,

$$\langle S_n(f) \mid S_n(g)\rangle = \langle \sum_{r=-n}^{n} c_r(f)e_r \mid \sum_{s=-n}^{n} c_s(g)e_s\rangle = \sum_{r=-n}^{n}\sum_{s=-n}^{n}\overline{c_r(f)}c_s(g)\langle e_r \mid e_s\rangle = \sum_{r=-n}^{n}\overline{c_r(f)}c_r(g)$$

cqfd

3.3 Les coefficients de Fourier déterminent la fonction

Théorème 3.6. *L'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire* injective *de $\mathcal{C}_{2\pi}$ vers $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$.*

PREUVE. Il suffit de montrer que le noyau est réduit à $\{\mathbf{0}\}$. Considérons une fonction *continue* f telle $\hat{f} = 0$, *i.e.* telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = 0$. Dans ces conditions, la formule de Parseval montre que $\|f\|_2 = 0$ et donc que f est la fonction nulle. cqfd

Corollaire. *Deux fonctions 2π-périodiques et* continues *qui admettent les mêmes coefficients de Fourier sont égales.*

PREUVE. Si f et g sont de telles fonctions, alors $\hat{f} = \hat{g}$, soit $\widehat{f - g} = 0$ et donc $f - g = 0$ cqfd

Corollaire (Extension aux fonctions continues par morceaux).
Deux fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux qui admettent les mêmes coefficients de Fourier sont égales en tout point où elles sont continues.

PREUVE. Si f et g sont de telles fonctions, alors $\hat{f} = \hat{g}$, soit $c_n(f - g) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. La formule de Parseval donne $\|f - g\|_2^2 = 0$, soit $\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t) - g(t)\big|^2 \,\mathrm{d}t = 0$, ce qui implique la nullité de $f - g$ en tout point de continuité.
cqfd

4 Convergence ponctuelle

4.1 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 4.1 (Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^1$).
Si f est une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$*, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbf{R}$ et sa somme vaut f.*

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \ f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nt + b_n \sin nt\Big)}$$

PREUVE.
Pour $n \in \mathbf{Z}^*$, $\big|c_n(f)\big| = \big|(\mathrm{i}n)^{-1} c_n(f')\big| \leqslant 2^{-1}\big(n^{-2} + |c_n(f')|^2\big)$ grâce à l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$ pour a et b réels positifs. Ainsi :

$$\sum_{k=-n}^{n} \big|c_k(f)\big| \leqslant \big|c_0(f)\big| + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\Big(\frac{1}{n^2} + \big|c_k(f')\big|^2\Big) = \big|c_0(f)\big| + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\big|c_k(f')\big|^2$$
$$\leqslant \big|c_0(f)\big| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\big\|f'\big\|_2^2$$

Les sommes partielles $\sum_{k=-n}^{n}\big|c_k(f)\big|$ sont bornées, les séries $\sum |c_n|$ et $\sum \big|c_{-n}(f)\big|$ sont convergentes.
$c_0 + \sum_1^{\infty}(c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})$, série de Fourier de f, converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction continue et 2π-périodique notée $S(f)$, dont les coefficients de Fourier sont identiques à ceux de f. Ceci montre que les fonctions $S(f)$ et f sont identiques. cqfd

Remarque. Le lecteur attentif aura remarqué que $c_n(f) = (\mathrm{i}n)^{-1}c_n(f')$ est le produit des termes généraux de deux séries de carré sommable ; $c_n(f)$ est donc le terme général d'une série absolument convergente.

Théorème 4.2 (Extension aux fonctions continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).
Si f est une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbf{R}$ et sa somme vaut f.*

PREUVE. On reprend la démonstration en utilisant l'égalité : $c_n(f) = (\mathrm{i}n)^{-1}c_n(\mathrm{D}\,f)$ et en remplaçant f' par $\mathrm{D}\,f$. cqfd

4.2 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Théorème 4.3 (de Dirichlet).

Si f est une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge en tout point $t \in \mathbf{R}$ et sa somme est égale à la demi-somme de la limite à droite et de la limite à gauche de f en t.

En particulier, en tout point t où f est continue, la somme de la série de Fourier de f en t est égale à $f(t)$.

$$\boxed{\begin{aligned}\forall t \in \mathbf{R},\ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nt + b_n \sin nt\Big)\\ &= \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2} & \textit{si } f \textit{ n'est pas continue en } t\\ f(t) & \textit{si } f \textit{ est continue en } t\end{cases}\end{aligned}}$$

Preuve.

Noyau de Dirichlet. On pose $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$.
En effectuant le changement d'indice $r = -k$, on remarque que D_n est une fonction paire :

$$D_n(-t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \sum_{r=n}^{-n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}rt} = D_n(t) \tag{4.1}$$

Valeur moyenne de D_n :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \delta_{0,k} = \delta_{0,0} = 1 \tag{4.2}$$

Simplification de D_n pour $t \neq 0$ modulo 2π :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{-n} - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)t}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}} = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(1/2t)} \tag{4.3}$$

Expression de $\big[S_n(f)\big](t)$

$$\begin{aligned}\big[S_n(f)\big](t) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(t-u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-v)D_n(v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v)D_n(v)\,dv\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(f(t-v)+f(t+v)\big)D_n(v)\,dv\end{aligned}$$

Convergence de $\big[S_n(f)\big](t)$. On note $f(t-)$ (resp. $f(t+)$) la limite à gauche (resp. à droite) de f en t et on pose $2\ell = f(t-) + f(t+)$. Puisque D_n est une fonction paire et que sa valeur moyenne vaut 1, on peut écrire $2\pi\ell = \int_0^{\pi} 2\ell D_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi}\big(f(t-)+f(t+)\big)D_n(u)\,\mathrm{d}u$, et :

$$\begin{aligned}\ell - \big[S_n(f)\big](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\bigg(\Big(f(t-) - f(t-u)\Big) + \Big(f(t+) - f(t+u)\Big)\bigg)D_n(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(t-)-f(t-u)}{\sin(u/2)} + \frac{f(t+)-f(t+u)}{\sin(u/2)}\right)\sin(n+1/2)u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or, $u \mapsto \dfrac{f(t-) - f(t-u)}{2\sin(u/2)} = \dfrac{f(t-) - f(t-u)}{u} \dfrac{u/2}{\sin(u/2)}$ est continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en $u = 0$ car :

$$\frac{f(t-) - f(t-u)}{0-(-u)} \frac{u/2}{\sin(u/2)} \underset{u \uparrow 0}{\longrightarrow} f'_g(t) \times 1 \tag{4.4}$$

De même $u \mapsto \big(f(t+) - f(t+u)\big)\big(\sin u/2\big)^{-1}$ est continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en $t = 0$ par $-f'_d(t)$. Le lemme de Riemann-Lebesgue montre que $\lim_n \big(\ell - \big[S_n(f)\big](t)\big) = 0$. cqfd

Chapitre 9

Intégrale des fonctions vectorielles sur un segment

Sommaire

Intégrer des fonctions à valeurs vectorielles, passer à la limite à travers un signe $\int$, échanger les signes $\sum$ et $\int$, étudier des fonctions définies à l'aide d'une intégrale dépendant d'un paramètre, voilà le programme des réjouissances.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur un segment $S = [a, b]$ et sont à valeurs dans E, $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, dont la norme est notée $\|\ \|$.

1 Intégrale des fonctions en escalier

Cette section généralise aux fonctions vectorielles la définition et les propriétés de l'intégrale d'une fonction réelle en escalier vue en première année. C'est une section technique qui sert à mettre en place la section suivante ; ne pas s'apesantir.

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Intégrale d'une fonction en escalier).

Soient $\boldsymbol{\varphi}$ une fonction en escalier sur le segment $S = [a, b]$ à valeurs dans E, $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}} = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision subordonnée à $\boldsymbol{\varphi}$ du segment S, $\mathbf{v}_k$ la valeur constante de $\boldsymbol{\varphi}$ sur l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Le vecteur $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k$ est indépendant de la subdivision $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}$ choisie, il est appelé *intégrale de $\boldsymbol{\varphi}$ sur le segment S* et noté $\int_S \boldsymbol{\varphi}$, $\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}$ ou $\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\int_S \boldsymbol{\varphi} = \int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi} = \int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k}$$

Preuve. On pose $I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_{\boldsymbol{\varphi}}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k$. Si on ajoute un point $\alpha \in\ ]a_{i-1}, a_i[$ à la subdivision $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_{\boldsymbol{\varphi}} \cup \{\alpha\}) = \sum_{k=1}^{i-1}(a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k + (\alpha - a_{i-1})\mathbf{v}_i + (a_i - \alpha)\mathbf{v}_i + \sum_{k=i+1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k \\ = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k = I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_{\boldsymbol{\varphi}}) \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence montre qu'on ne change pas $I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_{\boldsymbol{\varphi}})$ en ajoutant un nombre fini de points à $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}$.

Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions subordonnées à $\boldsymbol{\varphi}$, $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est encore une subdivision subordonnée à $\boldsymbol{\varphi}$; elle ne diffère de σ_1 et σ_2 que d'un nombre fini de points ; ainsi

$$I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_1) = I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_1 \cup \sigma_2) = I(\boldsymbol{\varphi}, \sigma_2)$$

cqfd

Remarques.

Si φ est une fonction en escalier à valeurs réelles positives, $\int_{[a,b]} \varphi$ s'interprète comme l'aire de la portion de plan comprise entre les droites $t = a$, $t = b$, l'axe Ot et le graphe de φ.

$\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}$ ne dépend pas des valeurs de $\boldsymbol{\varphi}$ prises aux points a_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Si $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction constante égale à $\mathbf{v}$ sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$, $\boldsymbol{\varphi}$ est en escalier et $\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi} = (b - a)\mathbf{v}$. En particulier, si $\boldsymbol{\varphi}$ est nulle sauf sur un ensemble fini, $\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$.

1.2 Linéarité par rapport à la fonction

Proposition 1.1. *Si $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{\psi}$ sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, et λ et μ deux scalaires, on a :*

$$\int_{[a,b]} (\lambda\boldsymbol{\varphi} + \mu\boldsymbol{\psi}) = \lambda \int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi} + \mu \int_{[a,b]} \boldsymbol{\psi}$$

Preuve. Soient $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision subordonnée à $\boldsymbol{\varphi}$ *et* $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{v}_k$ (resp. $\mathbf{w}_k$) la valeur constante de $\boldsymbol{\varphi}$ (resp. $\boldsymbol{\psi}$) sur l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$, alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall t \in \,]a_{k-1}, a_k[,\ \lambda\boldsymbol{\varphi}(t) + \mu\boldsymbol{\psi}(t) = \lambda\mathbf{v}_k + \mu\mathbf{w}_k$$

et

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (\lambda\boldsymbol{\varphi} + \mu\boldsymbol{\psi}) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})(\lambda\mathbf{v}_k + \mu\mathbf{w}_k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k + \mu \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\mathbf{w}_k \\ &= \lambda \int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi} + \mu \int_{[a,b]} \boldsymbol{\psi}\end{aligned} \tag{1.1}$$

cqfd

1.3 Image de l'intégrale par une application linéaire

Proposition 1.2. *Soient $\boldsymbol{\varphi}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\mathbf{u}$ une application linéaire de E vers F ; alors :*

$$\mathbf{u}\Big(\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}\Big) = \int_{[a,b]} \mathbf{u} \circ \boldsymbol{\varphi}$$

Preuve. Soient $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision subordonnée à $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{v}_k$ la valeur constante de $\boldsymbol{\varphi}$ sur l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$; alors $\mathbf{u}(\mathbf{v}_k)$ est la valeur de $\mathbf{u} \circ \boldsymbol{\varphi}$ sur $]a_{k-1}, a_k[$ et, utilisant la linéarité de $\mathbf{u}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\Big(\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}\Big) &= \mathbf{u}\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\mathbf{u}(\mathbf{v}_k) \\ &= \int_{[a,b]} \mathbf{u} \circ \boldsymbol{\varphi}\end{aligned} \tag{1.2}$$

cqfd

1.4 Inégalité de la moyenne

Proposition 1.3. *Si $\boldsymbol{\varphi}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$, on a :*

$$\Big\|\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}\Big\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}\| \leqslant (b - a) \sup_{t \in [a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|$$

Preuve. Soient $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision subordonnée à $\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{v}_k$ la valeur constante de $\boldsymbol{\varphi}$ sur l'intervalle ouvert $]a_{k-1}, a_k[$; alors $\|\mathbf{v}_k\|$ est la valeur de $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ sur $]a_{k-1}, a_k[$ et :

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}\Big\| = \Big\|\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\mathbf{v}_k\Big\| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\|\mathbf{v}_k\| = \int_{[a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \sup_{t \in [a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\| = (b - a) \sup_{t \in [a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|\end{aligned} \tag{1.3}$$

cqfd

2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Nous continuons la généralisation du cours de première année : ce paragraphe propose de définir l'intégrale des fonctions à valeurs dans E et continues par morceaux sur un segment de $\mathbf{R}$.

2.1 Définition de l'intégrale

L'intégrale est définie à l'aide d'un passage à la limite. L'intégrale d'une fonction en escalier est connue ; une fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier ; par définition, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est définie par la limite des intégrales de cette suite de fonctions en escalier.

Lemme 2.1. *Soient* $\mathbf{f}$ *une fonction à valeurs dans* E *et continue par morceaux sur le segment* $[a,b]$*, et* $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ *une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers* $\mathbf{f}$ *sur* $[a,b]$ *; alors,*

(i) *la suite des intégrales* $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n\right)_n$ *admet une limite dans* E *;*
(ii) *cette limite ne dépend que* $\mathbf{f}$ *et non pas de la suite* $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$*.*

Preuve.
(i) Montrons que $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n\right)_n$ est une suite de Cauchy dans E. Puisque la suite $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\mathbf{f}$, on a :

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ \forall t\in[a,b],\ n>N \implies \|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\mathbf{f}(t)\|<\varepsilon \\ \text{donc}\quad &\forall(n,p)\in\mathbf{N}^2,\ \forall t\in[a,b], \\ &n>N \implies \|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\boldsymbol{\varphi}_{n+p}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{\varphi}_{n+p}(t)-\mathbf{f}(t)\|+\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\mathbf{f}(t)\|<2\varepsilon \\ \text{et}\quad &\forall(n,p)\mathbf{N}^2,\ n>N \implies \sup_{t\in[a,b]}\|\boldsymbol{\varphi}_{n+p}(t)-\boldsymbol{\varphi}_n(t)\|\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p\in\mathbf{N}$ et tout $n>N$, on a :

$$\left\|\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_{n+p}-\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n\right\|=\left\|\int_{[a,b]}(\boldsymbol{\varphi}_{n+p}-\boldsymbol{\varphi}_n)\right\|\leqslant(b-a)\sup_{t\in[a,b]}\|\boldsymbol{\varphi}_{n+p}-\boldsymbol{\varphi}_n\|\leqslant 2(b-a)\varepsilon$$

La suite $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n\right)_n$ est donc convergente puisqu'elle est de Cauchy dans E.

(ii) Soit $(\boldsymbol{\psi}_n)_n$ une autre suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{f}$ sur $[a,b]$. On considère la suite $(\boldsymbol{\rho}_n)_n$ définie par :

$$\forall p\in\mathbf{N},\ \boldsymbol{\rho}_{2p}=\boldsymbol{\varphi}_p \text{ et } \boldsymbol{\rho}_{2p+1}=\boldsymbol{\psi}_p$$

La suite $(\boldsymbol{\rho}_n)_n$ converge uniformément vers $\mathbf{f}$ sur $[a,b]$; la suite $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\rho}_n\right)_n$) admet donc une limite dans E et les deux suites extraites $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_p\right)_p$ et $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\psi}_p\right)_p$ admettent cette même limite.

cqfd

Définition 2.1 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux).
Soient $\mathbf{f}$ une fonction continue par morceaux sur le segment $S=[a,b]$ et $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{f}$ sur $[a,b]$; on appelle *intégrale de* $\mathbf{f}$ la limite de la suite $\left(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n\right)_n$ et on la note $\int_S\mathbf{f}$, $\int_{[a,b]}\mathbf{f}$ ou $\int_{[a,b]}\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$,

$$\int_{[a,b]}\mathbf{f}=\int_{[a,b]}\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t=\lim_n\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n$$

Remarques.
Cette définition est compatible avec la précédente ; si $\mathbf{f}$ est une fonction en escalier, la suite constante égale à $\mathbf{f}$ converge uniformément vers $\mathbf{f}$ sur $[a,b]$.

Cette définition est aussi compatible avec celle de première année : si f est une fonction réelle, les fonctions en escalier majorante et minorante à $(n+1)^{-1}$ près définissent une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

2.2 Linéarité par rapport à la fonction

Proposition 2.2. *Si* $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{g}$ *sont deux fonctions continues par morceaux sur* $[a,b]$*, et* λ *et* μ *deux scalaires, on a :*

$$\int_{[a,b]}(\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}) = \lambda\int_{[a,b]}\mathbf{f}+\mu\int_{[a,b]}\mathbf{g}$$

autrement dit, $\mathbf{f}\in\mathcal{CM}([a,b],E)\mapsto\int_{[a,b]}\mathbf{f}$ *est linéaire.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ (resp. $(\boldsymbol{\psi}_n)_n$) une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{f}$ (resp. $\mathbf{g}$) ; alors $(\lambda\boldsymbol{\varphi}_n+\mu\boldsymbol{\psi}_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\lambda\mathbf{f}+\mu\mathbf{g}$ sur $[a,b]$, et :

$$\int_{[a,b]}(\lambda\boldsymbol{\varphi}_n+\mu\boldsymbol{\psi}_n) = \lambda\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n+\mu\int_{[a,b]}\boldsymbol{\psi}_n \xrightarrow[n]{} \lambda\int_{[a,b]}\mathbf{f}+\mu\int_{[a,b]}\mathbf{g} \tag{2.1}$$

cqfd

2.3 Intégrale de deux fonctions qui coïcident sauf sur une partie finie d'un segment

Proposition 2.3. *Deux fonctions continues par morceaux qui coïcident sur une partie finie de* $[a,b]$ *ont des intégrales égales.*

Preuve. Nommons-les $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$; alors $\mathbf{g}-\mathbf{f}$ est nulle sauf sur une partie finie de $[a,b]$, donc en escalier et :

$$\mathbf{0} = \int_{[a,b]}(\mathbf{g}-\mathbf{f}) = \int_{[a,b]}\mathbf{g}-\int_{[a,b]}\mathbf{f} \tag{2.2}$$

cqfd

Si $\mathbf{f}$ est une fonction définie sur $[a,b]$ privé d'une subdivision $\sigma=(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, et si, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ la restriction de $\mathbf{f}$ à chacun des intervalles ouverts $]a_{k-1},a_k[$ est prolongeable par continuité sur $[a_{k-1},a_k]$, on définit l'intégrale de $\mathbf{f}$ par l'intégrale de l'un quelconque de ses prolongements $\tilde{\mathbf{f}}$, qui est une fonction continue par morceaux. Remarquez que $\tilde{\mathbf{f}}$ n'est pas, en général, continue en a_k.

2.4 Image de l'intégrale par une application linéaire

Proposition 2.4. *Soient* $\mathbf{f}\in\mathcal{CM}([a,b],)$ *et* $\mathbf{u}$ *une application linéaire de* E *vers* F *; alors*

$$\mathbf{u}\Big(\int_{[a,b]}\mathbf{f}\Big) = \int_{[a,b]}\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$$

Preuve. La propriété est vraie pour les fonctions en escalier ; un passage à la limite donne le résultat pour les fonctions continues par morceaux.

Soit $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{f}$; $\mathbf{u}$, application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, est continue et lipschitzienne ; $(\mathbf{u}\circ\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$ sur $[a,b]$ car

$$\begin{gathered}\forall t\in[a,b],\ \|\mathbf{u}\big(\boldsymbol{\varphi}_n(t)\big)-\mathbf{u}\big(\mathbf{f}(t)\big)\|_F\leqslant k_{\mathbf{u}}\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\mathbf{f}(t)\|_E\\ \text{et }\sup_{t\in[a,b]}\|\mathbf{u}\big(\boldsymbol{\varphi}_n(t)\big)-\mathbf{u}\big(\mathbf{f}(t)\big)\|_F\leqslant k_{\mathbf{u}}\sup_{t\in[a,b]}\|\boldsymbol{\varphi}_n(t)-\mathbf{f}(t)\|_E\xrightarrow[n]{}0\end{gathered}$$

Ainsi, $\int_{[a,b]}\mathbf{u}\circ\boldsymbol{\varphi}_n$ tend vers $\int_{[a,b]}\mathbf{u}\circ\mathbf{f}$. La continuité de $\mathbf{u}$ implique que $\mathbf{u}(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n)$ tend vers $\mathbf{u}(\int_{[a,b]}\mathbf{f})$. L'égalité pour tout $n\in\mathbf{N}$ de $\mathbf{u}\big(\int_{[a,b]}\boldsymbol{\varphi}_n\big)$ avec $\int_{[a,b]}\mathbf{u}\circ\boldsymbol{\varphi}_n$ et l'unicité de la limite donnent le résultat.

cqfd

Supposons E muni d'une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$; il est maintenant bien connu que toute application $\mathbf{f}$ se décompose sur cette base et on peut écrire pour tout $t \in [a, b]$: $\mathbf{f}(t) = \sum_{k=1}^{p} f_k(t)\mathbf{e}_k$. Dans ces conditions, on a le :

Corollaire (Intégrale et coordonnées).
$\mathbf{f}$ *est continue par morceaux sur* $[a, b]$ *si, et seulement si, les composantes* f_k *le sont, et :*

$$\int_{[a,b]} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\int_{[a,b]} f_k \Big) \mathbf{e}_k$$

Preuve. On note $\mathbf{e}_k^*$ la forme linéaire qui, à un vecteur de E, associe sa k^{e}composante relative à la base $\mathcal{B}$. $\mathbf{e}_k^*$ est continue (car linéaire) et $f_k = \mathbf{e}_k^* \circ \mathbf{f}$ est continue par morceaux si $\mathbf{f}$ l'est. $\lambda \in \mathbf{K} \mapsto \lambda \mathbf{v}$ est continue (car linéaire) et $f_k \mathbf{e}_k$ est continue par morceaux si f_k l'est. L'équivalence annoncée est démontrée.

L'application du théorème précédent à $\mathbf{e}_k^*$ montre que $\mathbf{e}_k^*(\int_{[a,b]} \mathbf{f})$, la composante de $\int_{[a,b]} \mathbf{f}$ relative à $\mathbf{e}_k$, vaut $\int_{[a,b]} \mathbf{e}_k^*(\mathbf{f}) = \int_{[a,b]} f_k$. cqfd

Corollaire (Cas des fonctions complexes).
$f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbf{C})$ *si, et seulement si,* $\Re\mathrm{e}(f)$ *et* $\Im\mathrm{m}(f)$ *appartiennent à* $\mathcal{CM}([a, b], \mathbf{R})$ *si, et seulement si,* $\overline{f} \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbf{C})$ *et :*

$$\boxed{\Re\mathrm{e}\Big(\int_{[a,b]} f\Big) = \int_{[a,b]} \Re\mathrm{e}(f), \quad \Im\mathrm{m}\Big(\int_{[a,b]} f\Big) = \int_{[a,b]} \Im\mathrm{m}(f), \quad \int_{[a,b]} \overline{f} = \overline{\int_{[a,b]} f}}$$

Preuve. C'est un cas particulier du corollaire précédent. cqfd

2.5 Inégalité de la moyenne

Définition 2.2 (Valeur moyenne d'une fonction sur un segment).
Si $\mathbf{f} \in \mathcal{CM}([a, b], E)$, la *valeur moyenne* de $\mathbf{f}$ sur $[a, b]$ est le vecteur $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_{[a,b]} \mathbf{f}$.

Théorème 2.5 (Inégalité de la moyenne).
Si $\mathbf{f}$ *est continue par morceaux, l'application* $\|\mathbf{f}\| : t \mapsto \|\mathbf{f}(t)\|$ *est continue par morceaux et :*

$$\boxed{\Big\| \int_{[a,b]} \mathbf{f} \Big\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\mathbf{f}\| \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|\mathbf{f}(t)\|}$$

Preuve. Soit $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{f}$ sur le segment $[a, b]$; alors la suite $(\|\boldsymbol{\varphi}_n\|)_n$ converge uniformément vers $\|\mathbf{f}\|$ sur $[a, b]$, et $(\sup_{t \in [a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}_n(t)\|)_n$ converge vers $\sup_{t \in [a,b]} \|\mathbf{f}(t)\|$.

Des inégalités :

$$\Big\| \int_{[a,b]} \boldsymbol{\varphi}_n \Big\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}_n\| \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|\boldsymbol{\varphi}_n(t)\|$$

on tire, par passage à la limite sur n :

$$\Big\| \int_{[a,b]} \mathbf{f} \Big\| \leqslant \int_{[a,b]} \|\mathbf{f}\| \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|\mathbf{f}(t)\|$$

cqfd

2.6 Positivité et croissance de l'intégrale

Dans tout ce paragraphe, les fonctions sont à valeurs réelles.

Théorème 2.6 (Positivité de l'intégrale).
Si f est une fonction continue par morceaux à valeurs réelles positives *sur $[a, b]$ (avec comme toujours $a < b$), l'intégrale de f sur $[a, b]$ est positive.*

$$\boxed{f \text{ continue par morceaux et } \forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant 0 \implies \int_{[a,b]} f \geqslant 0}$$

Preuve. Si f est positive, $|f| = f$ et l'inégalité de la moyenne $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} |f| \geqslant |\int_{[a,b]} f| \geqslant 0$ donne le résultat. cqfd

Théorème 2.7 (Croissance de l'intégrale).
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux à valeurs réelles telles que f soit plus petite que g, l'intégrale de f est plus petite que l'intégrale de g.

$$\boxed{(f, g) \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbf{R})^2 \text{ et } \forall t \in [a, b],\ f(t) \leqslant g(t) \implies \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g}$$

Preuve. $(g - f)$ est une fonction continue par morceaux et à valeurs réelles positives ; la positivité et la linéarité de l'intégrale donne le résultat :

$$0 \leqslant \int_{[a,b]} (g - f) = \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f \qquad (2.3)$$

cqfd

Théorème 2.8 (Caractérisation des fonctions nulles).
Une fonction f continue et à valeurs positives *sur un segment $[a, b]$ est nulle si, et seulement si, son intégrale est nulle.*

$$\boxed{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) \text{ et } \forall t \in [a, b],\ f(t) \geqslant 0 \qquad \int_{[a,b]} f = 0 \iff f = 0}$$

Preuve. Seule la condition nécessaire nécessite une démonstration. Démontrons la contraposée et prenons une fonction f *continue, positive et non nulle* (« non nulle » sigifie « qui n'est pas la fonction nulle », ou enore « non identiquement nulle » ; ne pas confondre avec une fonction qui ne s'annule pas).

S'il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que $f(t_0) > 0$, il existe aussi $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ on ait $t \in]a, b[$ et $f(t) \geqslant \frac{1}{2} f(t_0)$ (continuité de f en t_0). On appelle φ la fonction en escalier qui vaut $\frac{1}{2} f(t_0)$ sur $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ et qui est nulle en dehors. Ainsi $f \geqslant \varphi$ et $\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} \varphi = \eta\, f(t_0) > 0$

Sinon, pour tout $t \in]a, b[$, $f(t) = 0$ et, par continuité, $f = 0$ sur $[a, b]$. cqfd

Remarques. Une fonction f continue par morceaux et à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ est d'integrale nulle si, et seulement si, f est nulle sur $[a, b]$ sauf en ses points de discontinuité qui sont en nombre fini.

Une fonction f continue morceaux, à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ et strictement positive en un point de continuité, a une intégrale strictement positive sur $[a, b]$.

Théorème 2.9 (Inégalité de la moyenne, extension aux produits).
Soient $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ et $(G, \|\ \|_G)$ trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, $k > 0$ une constante telle que $\|B(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_G \leqslant k \|\mathbf{x}\|_E \|\mathbf{y}\|_F$

pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E \times F$ *; alors, pour toute application* $\mathbf{f}$ *(resp.* $\mathbf{g}$*) continue par morceaux sur* $[a, b]$ *et à valeurs dans* E *(resp.* F*), on a :*

$$\left\| \int_{[a,b]} B(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \right\|_G \leqslant k \sup_{t \in [a,b]} \|\mathbf{f}(t)\|_E \int_{[a,b]} \|\mathbf{g}\|_F$$

En particulier, si $(f, g) \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbf{R})^2$ *et* g *à valeurs* positives*, on a :*

$$\inf_{t \in [a,b]} \{f(t)\} \int_{[a,b]} g \leqslant \int_{[a,b]} fg \leqslant \sup_{t \in [a,b]} f(t) \int_{[a,b]} g$$

Preuve. Rappelons que B est une aplication continue ce qui montre que $t \mapsto B\big(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\big)$ est continue par morceaux. On peut écrire les inégalités :

$$\forall t \in [a, b],\ \|B\big(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\big)\|_G \leqslant k \|\mathbf{f}(t)\|_E \|\mathbf{g}(t)\|_F \leqslant k \sup_{t \in [a,b]} \{\|\mathbf{f}(t)\|_E\} \|\mathbf{g}(t)\|_F \tag{2.4}$$

et la positivité de l'intégrale donne la relation.

L'inégalité $\inf_{[a,b]}\{f(t)\} \leqslant f(t) \leqslant \sup_{t \in [a,b]}\{f(t)\}$ donne, par multiplication par le nombre *positif* $g(t)$:

$$\forall t \in [a, b],\ \inf_{[a,b]} \{f(t)\}\, g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant \sup_{t \in [a,b]} \{f(t)\}\, g(t) \tag{2.5}$$

et la positivité de l'intégrale donne la relation. cqfd

2.7 Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration

Proposition 2.10 (Restriction de l'intervalle d'intégration).
Si K *est un segment contenu dans* $[a, b]$ *et* χ_K *la fonction caractéristique de* K*, on a :*

$$\int_K \mathbf{f} = \int_{[a,b]} \chi_K \mathbf{f}$$

Preuve. Soient $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$, $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}$ une subdivision subordonnée qui contient les extrémités de K (sinon, on les ajoute) ; alors les fonctions $\boldsymbol{\varphi}\big|_K$ et $\chi_K \boldsymbol{\varphi}$ coïncident sur K et les intégrales sont égales. L'égalité est donc vraie pour les fonctions en escalier.

Soit $(\boldsymbol{\varphi}_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $\mathbf{f}$; alors, la suite $(\boldsymbol{\varphi}_n|_K)_n$ (resp. $(\boldsymbol{\varphi}_n \chi_K)_n$) convergent uniformément vers $\mathbf{f}|_K$ (resp. $\chi_K \mathbf{f}$) sur K (resp. $[a, b]$). Un passage à la limite donne le résultat. cqfd

2.8 Notation $\int_a^b$

Retrouvons la notation habituelle de l'intégrale : $\int_a^b \mathbf{f}$ grâce à la :

Définition 2.3 (Extension de la notation $\int_a^b \mathbf{f}$).
Soient I un intervalle et $\mathbf{f}$ une fonction continue par morceaux sur I ; alors pour $(a, b) \in I^2$, on pose :

$$\int_a^b \mathbf{f} = \begin{cases} \int_{[a,b]} \mathbf{f} & \text{si } a < b \\ -\int_{[b,a]} \mathbf{f} & \text{si } b < a \\ \mathbf{0} & \text{si } a = b \end{cases}$$

Avec cette nouvelle définition, on retrouve les propriétés fondamentales de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité par rapport à la fonction et inégalité de la moyenne. Seule la positivité a besoin que les bornes de l'intervalle d'intégration soient dans le « bon sens ».

Théorème 2.11 (Relation de Chasles).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction continue parmorceaux sur* I *et* a*,* b *et* c *trois éléments de* I*, alors :*

$$\int_a^b \mathbf{f} + \int_b^c \mathbf{f} = \int_a^c \mathbf{f}$$

Preuve. Regardez les six cas possibles de placement de trois nombres a, b et c les uns par rapport aux autres. cqfd

Théorème 2.12 (Linéarité).
Si a *et* b *sont deux points de* I*, l'application qui à* $\mathbf{f} \in \mathcal{CM}(I, E)$ *associe* $\int_a^b \mathbf{f}$ *est une application linéaire.*

Preuve. Envisagez les cas $a < b$, $a > b$ et $a = b$. cqfd

Théorème 2.13 (Inégalité de la moyenne).
Si a *et* b *sont deux points de* I *et* $\mathbf{f}$ *une fonction continue par morceaux, on a :*

$$\boxed{\left\| \int_a^b \mathbf{f} \right\| \leqslant \left| \int_a^b \|\mathbf{f}\| \right| \leqslant |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \|\mathbf{f}(t)\|}$$

Preuve. Envisagez les cas $a < b$, $a > b$ et $a = b$. cqfd

3 Convergences en moyenne et en moyenne quadratique

Les fonctions considérées sont définies sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$; elles sont continues ou continues par morceaux sur $[a, b]$. On note $\mathcal{C}([a, b])$ (resp. $\mathcal{CM}([a, b])$) l'espace des fonctions complexes continues (resp. continues par morceaux) sur le segment $[a, b]$. Puisque $a < b$ les intégrales s'écriront indifféremment $\int_{[a,b]}$ ou $\int_a^b$.

3.1 Norme de la convergence en moyenne sur $\mathcal{C}([a, b])$

$$\boxed{\|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f| = \int_{t=a}^b |f(t)| \,\mathrm{d}t}$$

$\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a, b])$; cette norme est appelée *norme de la convergence en moyenne* sur $[a, b]$.

Extension à $\mathcal{CM}([a, b])$

Imposons à toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b])$ d'avoir la valeur 0 en tout point de discontinuité ; cette convention conserve la valeur de l'intégrale de f. Avec cette convention, $\int_a^b |f| = 0$ si, et seulement si, $|f(t)| = 0$ en tout point de continuité de f et donc en tout point de $[a, b]$. Ainsi $\| \ \|_1$ est encore une norme sur $\mathcal{CM}([a, b])$.

3.2 Produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$

Définition 3.1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$; on pose :

$$\boxed{\langle f \mid g \rangle = \int_{[a,b]} \overline{f} g = \int_{t=a}^b \overline{f(t)} g(t) \,\mathrm{d}t}$$

Théorème 3.1 (Produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b])$).
$\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$ continues sur le segment $[a,b]$.

Preuve. Linéarité à droite, symétrie (éventuellement hermitienne) et positivité sont évidentes ; $0 = \langle f \mid f\rangle = \int_a^b |f|^2$ implique $|f| = 0$ puisque f est continue. cqfd

Extension aux fonctions continues par morceaux

En utilisant toujours la même convention, on donne la valeur 0 en tout point de discontinuité de la fonction, $\langle\ |\ \rangle$ reste un produit scalaire sur $\mathcal{CM}([a,b])$, $0 = \langle f \mid f\rangle = \int_I |f|^2$ implique $|f(t)| = 0$ en tout point de continuité de f donc en tout point de I.

3.3 Norme de la convergence en moyenne quadratique

$$\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f\rangle} = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}}$$

$\|\ \|_2$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$; cette norme est appelée *norme de la convergence en moyenne quadratique* sur $[a,b]$; c'est la norme associée au produit scalaire.

Avec la convention de nullité de la fonction en tous ses points de discontinuité, $\|\ \|_2$ est une norme sur $\mathcal{CM}([a,b])$.

Théorème 3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, on a

$$\boxed{|\langle f \mid g\rangle| = \left|\int_a^b \overline{f}g\right| \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}\sqrt{\int_a^b |g|^2}}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si, et seulement si, f et g sont liées, i.e. *proportionnelles.*

Preuve. On retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà démontrée dans le cas général d'un produit scalaire réel ou hermitien complexe. cqfd

Proposition 3.3 (Comparaison des normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$).
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, on a :

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty, \qquad \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2$$

Preuve.
$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f|^2 \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|^2 = (b-a)\|f\|_\infty^2$
$\|f\|_1 = \int_a^b 1\cdot|f| = \langle 1 \mid |f|\rangle \leqslant \|1\|_2\|f\|_2 = \sqrt{b-a}\|f\|_2$ cqfd

4 Intégration des suites de fonctions continues

Un petit paragraphe d'une grande importance pratique ; nous obtiendrons des conditions suffisantes pour permettre la permutation des signes lim et $\int$ et des signes $\sum$ et $\int$.

4.1 Convergence uniforme et convergence en moyenne

Théorème 4.1 (Convergence uniforme et convergence en moyenne).
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, la suite $(f_n)_n$ converge en moyenne vers f et :

$$\boxed{\lim_n \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lim_n f_n}$$

Preuve. Puisque les fonctions f_n sont continues sur $[a,b]$ et que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément, f est continue et :

$$\Big|\int_a^b f_n - \int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f_n - f| = \|f_n - f\|_1 \leqslant (b-a)\|f_n - f\|_\infty \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{4.1}$$

ce qui montre que $\int_a^b f_n$ tend vers $\int_a^b f$ et que la convergence uniforme sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne. cqfd

4.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions continues

Théorème 4.2. *Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions continues et si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, la série des intégrales $\sum \int_{[a,b]} u_n$ est convergente et :*

$$\boxed{\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[a,b]} u_n}$$

Preuve. Appelons $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles ; c'est une suite de fonctions continues (les u_n le sont) qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers la somme s de la série $\sum u_n$. D'aprés le théorème précédent, on a

$$\int_a^b S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k \underset{n}{\longrightarrow} \int_a^b S = \int_a^b \sum_{n\geqslant 0} u_n \tag{4.2}$$

ce qui montre que $\sum \int_a^b u_n$ est une série convergente dont la somme est $\int_a^b \sum_{n\geqslant 0} u_n$. cqfd

Théorème 4.3 (Cas de la convergence normale).
Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions continues et si la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$, la série des intégrales $\sum \int_{[a,b]} |u_n|$ est convergente et :

$$\boxed{\Big\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big\|_1 = \int_{[a,b]} \Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[a,b]} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_1}$$

Preuve. Si la convergence est normale sur $[a,b]$, elle est absolue et uniforme, et :

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty \text{ et } \|u_n\|_1 = \int_a^b |u_n| \leqslant (b-a)\|u_n\|_\infty \tag{4.3}$$

ce qui montre la convergence de $\sum \int_{[a,b]} |u_n|$ et l'inégalité annoncée. cqfd

4.3 Convergence simple et convergence en moyenne

Peut-on affaiblir la condition de convergence uniforme pour passer à la limite à travers in signe $\int_{[a,b]}$? Oui, c'est l'objet du

Théorème 4.4 (de convergence dominée).
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs réelles ou complexes telle que
– *la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue par morceaux ;*
– *il existe une fonction continue par morceaux φ à valeurs réelles positives telle que :*

$$\forall (n,t) \in \mathbf{N} \times I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$$

Preuve. La démonstration est admise. cqfd

Remarque. Puisque toute fonction en escalier sur un segment est bornée sur ce segment, on peut remplacer la fonction φ du théorème de convergence dominée par une (fonction) constante, indépendante de $t \in [a,b]$ et $n \in \mathbf{N}$.

Exemple 4.1. $\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \chi_{\{\frac{\pi}{2}\}} = 0$
car $\forall (n,t)$, $|\sin^n t| \leqslant 1$ et $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\lim_n \sin^n t = 0$.

5 Primitives et intégrale d'une fonction continue

Étendre aux fonctions à valeurs vectorielles le théorème fondamental du calcul intégral : l'intégrale d'une fonction est l'accroissement de l'une de ses primitives ; voilà le but de cette section.

I est un intervalle de $\mathbf{R}$ et les fonctions considérées sont des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans E, un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

5.1 Primitive d'une fonction continue

La primitivation est l'opération inverse de la dérivation, ce qui donne la

Définition 5.1 (Primitive d'une fonction continue).
Soient I un intervalle et $\mathbf{f}$ une fonction *continue* sur I ; on appelle *primitive de* $\mathbf{f}$ *sur* I toute application $\mathbf{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :

$$\forall t \in I,\ \mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t)$$

On étend cette définition aux fonctions continues par morceaux :

Définition 5.2 (Primitive d'une fonction continue par morceaux).
Soient I un intervalle et $\mathbf{f}$ une fonction *continue par morceaux* sur I ; on appelle *primitive de* $\mathbf{f}$ *sur* I toute application $\mathbf{F}$ *continue* et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I telle qu'en tout point de continuité de $\mathbf{f}$, on ait : $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t)$

Théorème 5.1 (Unicité).
Deux primitives sur un intervalle *d'une même fonction continue par morceaux sont égales à une constante (additive) près.*

PREUVE. Soient $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ deux primitives de $\mathbf{f}$ sur I.

Si $\mathbf{f}$ est continue sur I, pout tout $t \in I$ $(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)'(t) = \mathbf{F}_1'(t) - \mathbf{F}_2'(t) = 0$, ce qui montre que $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ est constante sur *l'intervalle* I.

Si $\mathbf{f}$ est continue par morceaux sur I, $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ est *continue* et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I. En tout point de continuité de $\mathbf{f}$, $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ a une dérivée nulle, donc est constante. cqfd

C'est le moment de réviser son tableau de primitives classiques.

5.2 Théorème fondamental du calcul intégral

Lemme 5.2. *Si* $\mathbf{f}$ *est une fonction continue par morceaux qui admet* $\mathbf{v}$ *pour limite à droite en un point* $t_0 \in I$*, la fonction réelle* g *qui à* $h > 0$ *associe* $\sup\{\|\mathbf{f}(u)\| \,/\, u \in [t_0, t_0+h]\}$ *admet* $\|\mathbf{v}\|$ *pour limite à droite en* 0.

PREUVE. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$u \in [t_0, t_0+\eta] \implies \|\mathbf{f}(u) - \mathbf{v}\| < \varepsilon \tag{5.1}$$

En utilisant l'inégalité de Minkowski : $\big|\|\mathbf{f}(u)\| - \|\mathbf{v}\|\big| \leqslant \|\mathbf{f}(u) - \mathbf{v}\|$, on obtient :

$$\begin{aligned} u \in [t_0, t_0+\eta] &\implies \|\mathbf{v}\| - \varepsilon < \|\mathbf{f}(u)\| < \|\mathbf{v}\| + \varepsilon \\ \text{et } \forall h > 0,\ h \leqslant \eta &\implies \|\mathbf{v}\| - \varepsilon \leqslant \sup\{\|\mathbf{f}(u)\| \,/\, u \in [t_0, t_0+h]\} \leqslant \|\mathbf{v}\| + \varepsilon \end{aligned}$$

et g admet $\|\mathbf{v}\|$ pour limite à droite en 0. cqfd

Lemme 5.3. *Soient* $\mathbf{f}$ *une fonction continue par morceaux sur un intervalle* I*,* a *un point de* I *et* $\mathbf{F} : t \mapsto \int_{u=a}^{t} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u$ *; alors*

(*i*) $\mathbf{F}$ *est continue sur* I *;*

(*ii*) *si* $\mathbf{f}$ *admet une limite à droite en* t_0 *notée* $\mathbf{f}(t_0+)$*,* $\mathbf{F}$ *admet une dérivée à droite en* t_0 *et* $\mathbf{F}_d'(t_0) = \mathbf{f}(t_0+)$ *;*

(*iii*) *si* $\mathbf{f}$ *admet une limite à gauche en* t_0 *notée* $\mathbf{f}(t_0-)$*,* $\mathbf{F}$ *admet une dérivée à gauche en* t_0 *et* $\mathbf{F}_g'(t_0) = \mathbf{f}(t_0-)$.

PREUVE.

(*i*) La continuité sur I équivaut à la continuité sur tout segment de I. Soient S un segment de I et $M_S = \sup\{\|\mathbf{f}(t)\| \,/\, t \in S\}$ (une fonction continue par morceaux est bornée sur un segment) ; alors, pour t_1 et t_2 dans S, on obtient :

$$\|\mathbf{F}(t_1) - \mathbf{F}(t_2)\| = \Big\|\int_{u=t_1}^{t_2} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u\Big\| \leqslant \Big|\int_{u=t_1}^{t_2} \|\mathbf{f}(u)\|\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant |t_2 - t_1| M_S \tag{5.2}$$

et $\mathbf{F}$ est lipschitzienne sur S (de rapport M_S), donc continue sur S.

(*ii*) Soit $h > 0$; utilisons le taux d'accroissement de $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \Big\|\frac{1}{h}\big(\mathbf{F}(t_0+h) - \mathbf{F}(t_0)\big) - \mathbf{f}(t_0+)\Big\| &= \frac{1}{h}\Big\|\int_{u=t_0}^{t_0+h} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u - \mathbf{f}(t_0+)\Big\| \\ &= \frac{1}{h}\Big\|\int_{u=t_0}^{t_0+h} \big(\mathbf{f}(u) - \mathbf{f}(t_0+)\big)\,\mathrm{d}u\Big\| \\ &\leqslant \sup\{\|\mathbf{f}(u) - \mathbf{f}(t_0+)\| \,/\, u \in [t_0, t_0+h]\} \underset{\substack{h\to 0 \\ h>0}}{\longrightarrow} 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} h^{-1}\big(\mathbf{F}(t_0+h) - \mathbf{F}(t_0)\big) = \mathbf{f}(t_0+)$, *i.e.* $\mathbf{F}$ est dérivable à droite en t_0 et $\mathbf{F}_d'(t_0) = \mathbf{f}(t_0+)$.

(*iii*) Démonstration analogue.

cqfd

On peut maintenant donner les propriétés de $\mathbf{F} : t \in I \mapsto \int_{u=a}^{t} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u$:

Théorème 5.4 (Intégrale dépendant de sa borne supérieure).
Soient $\mathbf{f}$ *une fonction définie sur un intervalle* I*,* a *un point de* I *et* $\mathbf{F}$ *l'application qui à* t *associe* $\int_{u=a}^{t} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u$ *;*

(*i*) *si* $\mathbf{f}$ *est continue sur* I*,* $\mathbf{F}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et* $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$ *;*

(*ii*) *si* $\mathbf{f}$ *est continue par morceaux sur* I*,* $\mathbf{F}$ *est continue et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* I *et* $\mathrm{D}\,\mathbf{F} = \mathbf{f}$*.*

PREUVE.

(*i*) Le lemme montre qu'en tout point t_0 de I, $\mathbf{F}$ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales à $\mathbf{f}(t_0)$; $\mathbf{F}$ est donc dérivable sur I et sa dérivée $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$ est continue.

(*ii*) Le lemme montre que $\mathbf{F}$ est continue sur I. Soit $S = [c, d]$ un segment de I tel que $\mathbf{f}$ soit continue sur l'intérieur $]c, d[$ de S et prolongeable en une fonction continue $\tilde{\mathbf{f}}_S$ sur S ; $\mathbf{F}\big|_S$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de S, admet une dérivée à droite en c égale à $\tilde{\mathbf{f}}_S(c)$ et une dérivée à gauche en d égale à $\tilde{\mathbf{f}}_S(d)$ et la restriction de $\mathbf{F}$ à l'intérieur de S se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur S. $\mathbf{F}$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I dont la dérivée est égale à $\mathbf{f}$ en tout point où elle existe, *i.e.* $\mathrm{D}\,\mathbf{F} = \mathbf{f}$.

cqfd

Théorème 5.5 (Primitives et intégrale).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction continue (resp. continue par morceaux) sur* I *et* a *un point de* I*,*

(*i*) $\mathbf{F} : t \in I \mapsto \int_{u=a}^{t} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u$ *est l'unique primitive de* $\mathbf{f}$ *sur* I *nulle en* a *;*

(*ii*) *pour toute primitive* $\mathbf{h}$ *de* $\mathbf{f}$ *sur* I *et tout* $(a, b) \in I^2$*, on a*

$$\int_a^b \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{h}(b) - \mathbf{h}(a)$$

PREUVE.

(*i*) $\mathbf{F}$ est une primitive de $\mathbf{f}$; si $\mathbf{F}_1$ est une autre primitive de $\mathbf{f}$ nulle en a, $\mathbf{F} - \mathbf{F}_1$ est nulle en a, constante sur I, donc nulle sur I.

(*ii*) $t \mapsto \mathbf{h}(t) - \mathbf{h}(a)$ est une primitive de $\mathbf{f}$ sur I nulle en a, donc égale à $\mathbf{F}$.

cqfd

5.3 Applications

5.3.1 Accroissement et intégrale

Si $\mathbf{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $\mathbf{f}$ est une primitive de la fonction continue $\mathbf{f}'$. De même, si $\mathbf{f}$ est une fonction *continue* de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, $\mathbf{f}$ est toujours une primitive de la fonction $\mathrm{D}\,\mathbf{f}$ continue par morceaux sur I. On a donc le

Théorème 5.6. *Si* $\mathbf{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *(resp. continue et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux) sur* I*, on a :*

$$\boxed{\forall (a, b) \in I^2,\ \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a) = \int_{t=a}^{b} \mathbf{f}'(t)\,\mathrm{d}t}$$

5.3.2 Primitives T-périodiques d'une fonction T-périodique

À quelles conditions les primitives d'une fonction T-périodique sont-elles T-périodiques ? La proposition suivante répond à cette question.

Proposition 5.7. *Si* $\mathbf{f}$ *est une fonction continue (resp. continue par morceaux) sur* $\mathbf{R}$ *et de période* T*, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *toutes les primitives de* $\mathbf{f}$ *sont périodiques ;*
(*ii*) $\mathbf{F} : t \in I \mapsto \int_{u=a}^{t} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u$ *est* T*-périodique ;*
(*iii*) $\int_{u=0}^{T} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{0}$.

Preuve.
i. $\Longrightarrow$ *ii.* $\mathbf{F}$ est une primitive particulière.
ii. $\Longrightarrow$ *iii.* $\mathbf{F}(T) = \mathbf{F}(0)$, *i.e.* $\int_{[0,T]} \mathbf{f} = \mathbf{0}$.
iii. $\Longrightarrow$ *i.* Soit $\mathbf{h}$ une primitive de $\mathbf{f}$; posons $\mathbf{H}(t) = \mathbf{h}(t+T) - \mathbf{h}(t)$; $\mathbf{H}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $\mathbf{R}$, et :

$$\mathbf{H}'(t) = \mathbf{h}'(t+T) - \mathbf{h}'(t) = \mathbf{f}(t+T) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ (resp. en tout point de continuité de $\mathbf{f}$) ; ceci implique que $\mathbf{H}$ est une fonction constante égale à $\mathbf{H}(0) = \mathbf{h}(T) - \mathbf{h}(0) = \int_{[0,T]} \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Ainsi $\mathbf{H}$ est la fonction nulle et $\mathbf{h}$ est périodique de période T. cqfd

Proposition 5.8 (Intégrale d'une fonction périodique sur une période).
L'intégrale d'une fonction continue (resp. continue par morceaux) et périodique sur $\mathbf{R}$ *est indépendante de la période choisie.*
En particulier, si $\mathbf{f}$ *est* T*-périodique, on a les relations :*

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\quad \int_a^{a+T} \mathbf{f} = \int_b^{b+T} \mathbf{f} \quad \textit{et} \quad \int_a^{b} \mathbf{f} = \int_{a+T}^{b+T} \mathbf{f}}$$

Preuve. Soit $\mathbf{h}$ une primitive de $\mathbf{f}$ sur $\mathbf{R}$ et posons $\mathbf{H}(t) = \int_{u=t}^{t+T} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{h}(t+T) - \mathbf{h}(t)$; la relation (5.4) montre $\mathbf{H}$ est une fonction constante et donc $\mathbf{H}(a) = \mathbf{H}(b)$.
Par application de la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{a+T}^{b+T} \mathbf{f} = -\int_a^{a+T} \mathbf{f} + \int_a^{b} \mathbf{f} + \int_b^{b+T} \mathbf{f} = \int_a^{b} \mathbf{f} \tag{5.5}$$

cqfd

6 Calcul intégral

6.1 Formule d'intégration par parties

Théorème 6.1 (Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction vectorielle et* φ *une fonction numérique de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*, on a pour tout* a *et* b *dans* I *:*

$$\boxed{\int_{t=a}^{b} \varphi(t)\mathbf{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b)\mathbf{f}(b) - \varphi(a)\mathbf{f}(a) - \int_{t=a}^{b} \varphi'(t)\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t=a}^{b} \varphi'(t)\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b)\mathbf{f}(b) - \varphi(a)\mathbf{f}(a) - \int_{t=a}^{b} \varphi(t)\mathbf{f}'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Preuve. De $(\varphi\,\mathbf{f})' = \varphi\,\mathbf{f}' + \varphi'\mathbf{f}$, on tire $\varphi\,\mathbf{f}' = (\varphi\,\mathbf{f})' - \varphi'\mathbf{f}$, ce qui donne le résultat par intégration. La démonstration est analogue pour la seconde formule. cqfd

Théorème 6.2 (Cas des fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).
La formule d'intégration par parties est encore valable pour les fonctions continues *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* I.

Preuve. $\mathbf{f}\varphi$ est une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I ; en dehors d'une partie finie du segment S d'extrémités a et b, on peut écrire :

$$(\varphi\,\mathbf{f})'(t) = \varphi(t)\mathbf{f}'(t) + \varphi'(t)\mathbf{f}(t) \text{ et } \varphi(t)\mathbf{f}'(t) = (\varphi\,\mathbf{f})'(t) - \varphi'(t)\mathbf{f}(t)$$

ce qui donne le résultat par intégration. On a une formule analogue pour l'intégration par parties de $\int_{t=a}^{b} \varphi'(t)\mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$. cqfd

Proposition 6.3 (Formule d'intégration par parties itérée).
Si $\mathbf{f}$ est une fonction vectorielle et φ une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux) sur I, on a pour tout a et b dans I :

$$\int_a^b \varphi\,\mathbf{f}^{(k)} = \Big[\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p\varphi^{(p)}(t)\mathbf{f}^{(k-1-p)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b} + (-1)^k\int_a^b \varphi^{(k)}\mathbf{f}$$

Preuve. Démonstration par récurrence sur k.
Le cas $k = 1$ est la formule habituelle d'intégration par parties.
La propriété est hériditaire grâce au calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi\,\mathbf{f}^{(k+1)} &= \varphi(t)\mathbf{f}^{(k)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \varphi'\mathbf{f}^{(k)} \\
&= \varphi(t)\mathbf{f}^{(k)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b} - \Big[\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p\varphi'^{(p)}(t)\mathbf{f}^{(k-1-p)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b} - (-1)^k\int_a^b \varphi'^{(k)}\mathbf{f} \\
&= \Big[\varphi(t)\mathbf{f}^{(k)}(t) + \sum_{p=0}^{k-1}(-1)^{p+1}\varphi^{(p+1)}(t)\mathbf{f}^{\left(k-(p+1)\right)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b} + (-1)^{k+1}\int_a^b \varphi^{(k+1)}\mathbf{f} \\
&= \Big[\varphi(t)\mathbf{f}^{(k)}(t) + \sum_{q=1}^{k}(-1)^q\varphi^{(q)}(t)\mathbf{f}^{(k-q)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b} + (-1)^{k+1}\int_a^b \varphi^{(k+1)}\mathbf{f}
\end{aligned}$$

cqfd

6.2 Changement de variable

6.2.1 Cas des fonctions continues

Théorème 6.4 (Formule de changement de variable).
Si $\mathbf{f}$ est une fonction continue sur I à valeurs dans E et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ à valeurs dans I, on a :

$$\boxed{\int_{t=\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{f}\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u}$$

Preuve. Soit $\mathbf{F}$ une primitive de $\mathbf{f}$ (continue) sur I ; $\mathbf{F}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I, $\mathbf{F}\circ\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ par composition et $(\mathbf{F}\circ\varphi)' = \mathbf{F}'\circ\varphi\,\varphi' = \mathbf{f}\circ\varphi\,\varphi'$, ce qui montre que $\mathbf{F}\circ\varphi$ est une primitive de $\mathbf{f}\circ\varphi\,\varphi'$. Ainsi :

$$\int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{f}\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{F}\circ\varphi(u)\Big]_{u=\alpha}^{u=\beta} = \mathbf{F}\big(\varphi(\alpha)\big) - \mathbf{F}\big(\varphi(\beta)\big) = \int_{t=\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (6.1)$$

cqfd

6.2.2 Cas des fonctions continues par morceaux

Théorème 6.5 (Cas des fonctions continues par morceaux).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction continue par morceaux sur* I *à valeurs dans* E *et* φ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\alpha,\beta]$ *à valeurs dans* I *et strictement monotone, on a :*

$$\boxed{\int_{t=\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{f}\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u}$$

PREUVE. Soit $\mathbf{F}$ une primitive de $\mathbf{f}$ (continue par morceaux) sur I ; $\mathbf{F}$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$ privé d'une partie finie σ ; $\mathbf{F}\circ\varphi$ est donc continue sur $[\alpha,\beta]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ en dehors de la partie finie $\varphi^{<-1>}(\sigma)$ (la partie est finie puisque φ est strictement monotone) et en dehors de cette partie finie, $(\mathbf{F}\circ\varphi)' = \mathbf{F}'\circ\varphi\,\varphi' = \mathbf{f}\circ\varphi\,\varphi'$, ce qui montre que $\mathbf{F}\circ\varphi$ est une primitive de $\mathbf{f}\circ\varphi\,\varphi'$, et...Ainsi :

$$\int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{f}\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{F}\circ\varphi(u)\Big]_{u=\alpha}^{u=\beta} = \mathbf{F}\big(\varphi(\alpha)\big) - \mathbf{F}\big(\varphi(\beta)\big) = \int_{t=\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$$

cqfd

6.2.3 En pratique

S'il s'agit de calculer une intégrale de la forme $\int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{f}\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, posez $t=\varphi(u)$, calculez formellement la différentielle $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$, remplacez les bornes par $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ et servez chaud !

S'il s'agit de transformer l'intégrale $\int_{t=a}^{b} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une fonction strictement monotone φ, posez $t=\varphi(u)$, calculez la différentielle $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et remplacez les bornes a et b par $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$.

Voilà la grande force des notations de Leibniz qui ont permis l'essor du calcul différentiel et intégral vers la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle.

6.2.4 Applications

Si $\mathbf{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[-a,a]$ avec $a>0$,

$$\boxed{\int_{t=-a}^{a} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=0}^{a} \big(\mathbf{f}(u)+\mathbf{f}(-u)\big)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 2\int_{u=0}^{a} \mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u & \text{si } \mathbf{f} \text{ est paire} \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{f} \text{ est impaire} \end{cases}}$$

Si $\mathbf{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, en utilisant le changement de variable $t = a+(b-a)u$ ou $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}v$,

$$\boxed{\int_{t=a}^{b} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\int_{u=0}^{1} \mathbf{f}\big(a+(b-a)u\big)\,\mathrm{d}u = \frac{b-a}{2}\int_{v=-1}^{1} \mathbf{f}\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}v\right)\mathrm{d}v}$$

7 Accroissements finis

7.1 Cas des fonctions réelles

Quelques rappels de première année concernant les fonctions réelles.

Théorème 7.1 (Théorème de Rolle).
Si f est une fonction à valeurs réelles*, continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$, il existe $c\in\,]a,b[$ avec*

$$f'(c)=0$$

Théorème 7.2 (Théorème de Rolle, généralisation).
Si f est une fonction à valeurs réelles*, continue sur l'intervalle $[a,+\infty]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,+\infty[$ et telle que $\lim_{t\uparrow+\infty} f(t)=f(a)$, il existe $c\in\,]a,+\infty[$ avec*

$$f'(c)=0$$

Preuve. On pose $u=\exp(-t)$, soit $t=-\ln u$ et $u\mapsto f(-\ln u)$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0,\exp(-a)]$. Le théorème (habituel) de Rolle permet de conclure. cqfd

Théorème 7.3 (Égalité des accroissements finis).
Si f est une fonction à valeurs réelles*, continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe $c\in\,]a,b[$ avec*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème 7.4 (Inégalité des accroissements finis).
Si f est une fonction à valeurs réelles*, continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ telle qu'il existe m et M vérifiant $m\leqslant f'(t)\leqslant M$ pour tout $t\in\,]a,b[$, alors*

$$m\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant M$$

Remarque. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis tombent en défaut si les fonctions sont à valeurs complexes ou vectorielles ; $t\mapsto\exp(it)$ fournit un contre-exemple sur le segment $[0,2\pi]$.

7.2 Inégalité des accroissements finis

Rappelons la relation fondamentale qui lit une fonction et sa dérivée : si $\mathbf{f}$ est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I,

$$\forall(u,v)\in I^2,\ \mathbf{f}(v)-\mathbf{f}(u)=\int_{t=u}^{v}\mathbf{f}'(t)\,\mathrm{d}t$$

Une majoration de $\|\mathbf{f}'(t)\|$ donne une majoration de l'accroissement de $\mathbf{f}$.
Considérons le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 7.5 (Inégalité des accroissements finis).
Si $\mathbf{f}$ est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, et si λ est un nombre positif vérifiant $\|\mathbf{f}'(t)\|\leqslant\lambda$ pour tout $t\in\,]a,b[$, alors

$$\|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)\|\leqslant\lambda(b-a)$$

Preuve. Soient u et v deux points de $]a,b[$ avec $u<v$; on a :

$$\|\mathbf{f}(u)-\mathbf{f}(v)\|=\left\|\int_{t=u}^{v}\mathbf{f}'(t)\,\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_{t=u}^{v}\|\mathbf{f}'(t)\|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{t=u}^{v}\lambda\,\mathrm{d}t=(v-u)\lambda \tag{7.1}$$

Un passage à la limite pour $u\downarrow a$ et $v\uparrow b$ donne l'inégalité annoncée, puisque les limites existent. cqfd

Une fonction peut être continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $t \mapsto t \sin(t^{-1})$ en est un exemple.

Envisageons maintenant le cas des fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Théorème 7.6 (Inégalité des accroissements finis).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction continue et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur l'intervalle* I*, et* $\lambda > 0$ *un majorant de* $\|\mathbf{f}'(t)\|$ *en tout point où la dérivée existe, alors*

$$\boxed{\forall (a, b) \in I^2, \ \|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\| \leqslant \lambda(b - a)}$$

Preuve. Soit $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision du segment $[a, b]$ subordonnée à $\mathbf{f}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[a_{i-1}, a_i]$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \|\mathbf{f}(a_i) - \mathbf{f}(a_{i-1}\| \leqslant \lambda(a_i - a_{i-1}) \tag{7.2}$$

En sommant ce inégalités et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient le résultat demandé. cqfd

7.3 Prologement des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 7.7 (Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction continue sur le segment* $[a, b]$*, de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $]a, b]$*, telle que* $\mathbf{f}'$ *admet une limite (finie) en* a*,* $\mathbf{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur le segment* $[a, b]$*.*

Preuve. Les hypothèses sur $\mathbf{f}$ montrent que $\mathbf{f}$ est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$. Appelons $\mathbf{g}$ le prolongement par continuité de $\mathbf{f}'$ sur $[a, b]$. On peut écrire :

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a) + \int_{u=a}^{t} \mathbf{f}'(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{f}(a) + \int_{u=a}^{t} \mathbf{g}(u)\,\mathrm{d}u \tag{7.3}$$

ce qui montre que $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, puisque $\mathbf{g}$ est continue sur $[a, b]$, et $\mathbf{f}'(a) = \mathbf{g}(a) = \lim_{t \downarrow a} \mathbf{f}'(t)$ cqfd

Théorème 7.8 (Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).
Si $\mathbf{f}$ *est une fonction continue sur le segment* $[a, b]$ *et de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur l'intervalle* $]a, b]$*, et si, pour tout* $r \in [\![1, k]\!]$*,* $\mathrm{D}^r\mathbf{f}$ *admet une limite (finie) en* a*,* $\mathbf{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur le segment* $[a, b]$*.*

Preuve. La démonstration s'effectue à l'aide d'une récurrence sur k, le cas $k = 1$ venant d'être démontré.

Si $\mathbf{f}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $]a, b]$, et si $\mathrm{D}^r\,\mathbf{f}$ admet une limite en a pour tout $r \in [\![1, k+1]\!]$, $\mathbf{f}$ vérifie les hypothèses du théorème au rang k, et, par hypothése de récurrence, $\mathbf{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$. On peut donc affirmer que $\mathrm{D}^k\,\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(k)}$ vérifie les hypothèses du théorème au rang 1, ce qui montre que $\mathrm{D}^k\,\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur le segment $[a, b]$. cqfd

7.4 Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un segment

Théorème 7.9. $\mathbf{f}$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^k$ *par morceaux sur le segment* $[a, b]$ *si, et seulement si, il existe une subdivision* $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *subordonnée à* $\mathbf{f}$ *telle que* $\mathbf{f}$ *soit de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* $]a_{i-1}, a_i[$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*, et* $\mathrm{D}^r\,\mathbf{f}$ *admette une limite à droite en* a_{i-1} *et une limite à gauche en* a_i *pour tout* $r \in [\![0, k]\!]$*.*

Preuve. Seule la condition suffisante mérite une démonstration, puisque, par définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, la restriction de $\mathrm{D}^r\,\mathbf{f}$ à $]a_{i-1}, a_i[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_{i-1}, a_i]$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par hypothèse, la restriction de $\mathbf{f}$ à $]a_{i-1}, a_i[$ se prolonge en une fonction $\tilde{\mathbf{f}}_i$ continue sur $[a_{i-1}, a_i]$. La fonction $\tilde{\mathbf{f}}_i$ vérifie sur $[a_{i-1}, a_i]$ les hypothèses du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. cqfd

8 Formules de Taylor

8.1 Égalité de Taylor à l'ordre k

Théorème 8.1 (Formule de Taylor à l'ordre k, reste intégral).

Pour une application $\mathbf{f}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et de classe* $\mathcal{C}^{k+1}$ *par morceaux sur* I*, on a la* formule de Taylor à l'ordre k avec reste intégral

$$\boxed{\begin{gathered}\forall (a,t) \in I^2,\ \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a) + \sum_{r=1}^{k} \frac{(t-a)^r}{r!}\,\mathrm{D}^r\,\mathbf{f}(a) + \mathbf{R}_k(t) \\ \textit{avec } \mathbf{R}_k(t) = \int_{u=a}^{t} \frac{(t-u)^k}{k!}\,\mathrm{D}^{k+1}\,\mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u = (t-a)^{k+1} \int_{v=0}^{1} \frac{(1-v)^k}{k!}\,\mathrm{D}^{k+1}\,\mathbf{f}\big(a+(t-a)v\big)\,\mathrm{d}v\end{gathered}}$$

Preuve. Utilisation de la formule d'intégration par parties itérée appliquée aux fonctions $\mathbf{f}$ et $\varphi(u) = \frac{(t-u)^k}{k!}$; pour tout $p \in [\![0,k]\!]$, $\varphi^{(p)}(u) = (-1)^p \frac{(t-u)^{k-p}}{(k-p)!}$, $\varphi^{(k+1)}(u) = 0$ et :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k(t) = \int_{u=a}^{t} \frac{(t-u)^k}{k!}\,\mathrm{D}^{k+1}\,\mathbf{f}(u)\,\mathrm{d}u &= \Big[\sum_{p=0}^{k} \frac{(t-u)^{k-p}}{(k-p)!}\mathbf{f}^{(k-p)}(u)\Big]_{u=a}^{u=t} + \mathbf{0} \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} -\frac{(t-a)^{k-p}}{(k-p)!}\mathbf{f}^{(k-p)}(a) + \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a) \qquad (8.1)\end{aligned}$$

ce qui donne la formule annoncée en posant $r = k - p$.

Le changement de variable $u = a + (t-a)v \iff v = \frac{u-a}{t-a}$ permet de passer de l'intervalle « variable », *i.e.* dépendant de t, $[a,t]$ à l'intervalle « fixe » $[0,1]$, et donne la seconde expression du reste.

cqfd

8.2 Majoration du reste

Théorème 8.2 (Inégalité de Taylor à l'ordre k).

Pour une application $\mathbf{f}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *et de classe* $\mathcal{C}^{k+1}$ *par morceaux sur* I *telle qu'il existe un majorant* M_{k+1} *de* $\|\mathrm{D}^{k+1}\,\mathbf{f}(u)\|$ *en tout point* u *où la dérivée d'ordre* $k+1$ *existe, on a* l'inégalité de Taylor à l'ordre k *:*

$$\boxed{\forall (a,t) \in I^2,\ \Big\|\mathbf{f}(t) - \sum_{r=0}^{k} \frac{(t-a)^r}{r!}\,\mathrm{D}^r\,\mathbf{f}(a)\Big\| \leqslant \frac{|t-a|^{k+1}}{(k+1)!} M_{k+1}}$$

Preuve. On a la majoration suivante du reste $\mathbf{R}_k$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{R}_k(t)\| &= |t-a|^{k+1} \Big\| \int_{v=0}^{1} \frac{(1-v)^k}{k!}\,\mathrm{D}^{k+1}\,\mathbf{f}\big(a+(t-a)v\big)\,\mathrm{d}v \Big\| \\ &\leqslant |t-a|^{k+1} \int_{v=0}^{1} \frac{(1-v)^k}{k!} \big\|\mathrm{D}^{k+1}\,\mathbf{f}\big(a+(t-a)v\big)\big\|\,\mathrm{d}v \qquad (8.2) \\ &\leqslant \frac{|t-a|^{k+1}}{k!} \int_{v=0}^{1} (1-v)^k M_{k+1}\,\mathrm{d}v = \frac{|t-a|^{k+1}}{k!} \frac{M_{k+1}}{k+1}\end{aligned}$$

cqfd

8.3 Formule de Taylor-Young

8.3.1 Développement limité d'une primitive

Théorème 8.3. *Si* $\mathbf{f}$ *est une fonction continue qui admet un développement limité à l'ordre* k *au voisinage d'un point* t_0 *de* I*, toute primitive* $\mathbf{F}$ *de* $\mathbf{f}$ *admet un développement limité à l'ordre* $k+1$ *au voisinage de* t_0 *; plus précisément,*

$$\boxed{\mathbf{f}(t_0+h) = \sum_{p=0}^{k} h^p \mathbf{a}_p + \mathrm{o}(h^k) \implies \mathbf{F}(t_0+h) = \mathbf{F}(t_0) + \sum_{p=0}^{k} \frac{h^{p+1}}{p+1}\mathbf{a}_p + \mathrm{o}(h^{k+1})}$$

Preuve. La fonction $t \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(t_0+h) = h^{-k}\big(\mathbf{f}(t_0+h) - \sum_{p=0}^{k} h^p \mathbf{a}_p\big)$ se prolonge en une fonction continue sur I ($\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \mathbf{0}$) ; par conséquent, $\sup_{t\in[t_0,t_0+h]}\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|$ admet 0 pour limite quand h tend vers 0. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|h^k|}\Big\|\mathbf{F}(t_0+h) - \mathbf{F}(t_0) - \sum_{p=0}^{k} \frac{h^{p+1}}{p+1}\mathbf{a}_p\Big\| \\
&\qquad = \frac{1}{|h^k|}\Big\|\int_{u=0}^{h}\Big(\mathbf{f}(t_0+u) - \sum_{p=0}^{k}(u)^p \mathbf{a}_p\Big)\,\mathrm{d}u\Big\| = \frac{1}{|h^k|}\Big\|\int_{u=0}^{h} u^k \boldsymbol{\varepsilon}(t_0+u)\,\mathrm{d}u\Big\| \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{1}{|h^k|}\Big|\int_{u=0}^{h} u^k\,\mathrm{d}u\Big| \sup_{u\in[0,h]}\|\boldsymbol{\varepsilon}(t_0+u)\| = \frac{1}{k+1}\sup_{t\in[t_0,t_0+h]}\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0
\end{aligned} \tag{8.3}$$

cqfd

8.3.2 Développement limité de la dérivée d'une fonction $\mathcal{C}^1$

Théorème 8.4. *Une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$*, dont la dérivée admet un développement limité à l'ordre k, admet un développement limité à l'ordre* $k+1$ *et le développement limité de la dérivée est la dérivée terme à terme du développement limité de la fonction ; plus précisément :*

$$\mathbf{f}(t_0+h) = \mathbf{f}(t_0) + \sum_{p=0}^{k} \mathbf{a}_p h^{p+1} + \mathrm{o}(h^{k+1}) \implies \mathbf{f}'(t_0+h) = \sum_{p=0}^{k}(p+1)\mathbf{a}_{p+1}h^p + \mathrm{o}(h^k)$$

Preuve. $\mathbf{f}$ est une primitive de $\mathbf{f}'$ et on applique le théorème précédent cqfd

Remarque. Attention ! Il faut supposer l'existence du développement limité de $\mathbf{f}'$ sinon le théorème est mis en défaut : $f(t) = t^3 \sin\frac{1}{t} = \mathrm{o}(t^2)$ admet un développement limité à l'ordre 2, tandis que sa dérivée n'admet un développement limité qu'à l'ordre 0.

8.3.3 Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une fonction $\mathcal{C}^k$

Théorème 8.5 (Formule de Taylor-Young).
Toute fonction de classe $\mathcal{C}^k$ *sur* I *admet un développement limité à l'ordre* k *en tout point de* I*, à savoir :*

$$\boxed{\mathbf{f}(t_0+h) = \mathbf{f}(t_0) + \sum_{p=1}^{k} \frac{h^p}{p!}\mathbf{f}^{(p)}(t_0) + \mathrm{o}(h^k)}$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur k, le cas $k = 1$ ayant déjà été traité (la dérivation équivaut à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1).

Si $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, $\mathbf{f}'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et admet, grâce à l'hypothèse de récurrence, un développement limité à l'ordre k :

$$\mathbf{f}'(t_0+h) = \mathbf{f}'(t_0) + \sum_{p=1}^{k} \frac{h^p}{p!}\,\mathrm{D}^p\,\mathbf{f}'(t_0) + \mathrm{o}(h^k) = \sum_{p=0}^{k} \frac{h^p}{p!}\mathbf{f}^{(p+1)}(t_0) + \mathrm{o}(h^k) \tag{8.4}$$

et par intégration :

$$\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) = \sum_{p=0}^{k} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t_0) + \mathrm{o}(h^{k+1}) \tag{8.5}$$

cqfd

9 Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions numériques qui converge simplement vers une fonction f sur l'intervalle I, à quelles conditions peut-on affirmer que la limite f est dérivable, de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$? Les mêmes questions seront posées pour l'étude des séries de fonctions.

Prenons, par exemple, $f_n : t \mapsto \sqrt{t^2 + \frac{1}{n+1}}$. Les fontions f_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$; la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : t \mapsto |t|$ sur $\mathbf{R}$, puisque :

$$0 < f_n(t) - f(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n+1}} - |t| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n+1}} + |t|} \leqslant \frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; or la limite f n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$ (f n'est pas dérivable en $t = 0$). Ceci montre l'*insuffisance* de la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f pour affirmer la dérivabilité de f.

Dans cette section, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

9.1 Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

Lemme 9.1. *Si $(h_n)_n$ est une suite de fonctions numériques continues qui converge uniformément sur tout segment de l'intervalle I vers une fonction (continue) h, la suite $(H_n)_n$ des primitives de h_n nulles en un point a de I converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive H de h nulle en a.*

Preuve. La continuité des h_n et la convergence uniforme sur tous les segments de I de $(h_n)_n$ vers h montrent la continuité de h.

Soient S un segment (quelconque) de I et $K = [c, d]$ un segment de I qui contient S et a ; alors, pour tout $t \in S$,

$$\begin{aligned}|H_n(t) - H(t)| &= \Big|\int_{u=a}^{t} \big(h_n(u) - h(u)\big)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \Big|\int_{u=a}^{t} \big|h_n(u) - h(u)\big|\,\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant |t-a| \sup_{u\in K}\big|h_n(u) - h(u)\big| \leqslant (d-c)\|h_n - h\|_{\infty,K}\end{aligned} \tag{9.1}$$

Ainsi, $\|H_n - H\|_{\infty,S} \leqslant (d-c)\|h_n - h\|_{\infty,K} \underset{n}{\longrightarrow} 0$. cqfd

Théorème 9.2 (Dérivation de la limite).

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f, et si la suite $(f'_n)_n$ des dérivées converge uniformément sur tout segment de I vers g, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$, i.e.

$$\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\Big(\lim_n f_n(t)\Big) = \lim_n \frac{d}{dt}\Big(f_n(t)\Big)$$

PREUVE. Pour tout $t \in I$, $f_n(t) = f_n(a) + \int_{u=a}^{t} f_n'(u)\,\mathrm{d}u$; un passage à la limite sur n donne :

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + \int_{u=a}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u \tag{9.2}$$

ce qui montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. cqfd

Remarque. Si S et $K = [c, d]$ sont des segments de I tels que K contienne S et a, les inégaltés pour tout $t \in S$

$$\begin{aligned}
\left|f_n(t) - f(t)\right| &= \left|f_n(a) - f(a) + \int_{u=a}^{t} \big(f_n'(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \left|f_n(a) - f(a)\right| + \left|\int_{u=a}^{t} \big(f_n'(u) - g(u)\big)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant |\left|f_n(a) - f(a)\right| + \left|\int_{u=a}^{t} \left|f_n'(u) - g(u)\right|\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \left|f_n(a) - f(a)\right| + |t-a|\,\|f_n' - g\|_{\infty,K} \\
&\leqslant \left|f_n(a) - f(a)\right| + (d-c)\|f_n' - g\|_{\infty,K}
\end{aligned} \tag{9.3}$$

donnent :

$$\|f_n - f\|_{\infty,S} \leqslant |f_n(a) - f(a)| + (d-c)\|f_n' - g\|_{\infty,K}$$

et montrent la convergence uniforme sur tout segment de I de la suite $(f_n)_n$ vers f.

Théorème 9.3 (Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).
Si $(f_n)_n$ est une suite de fontions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, si, pour tout $r \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(\mathrm{D}^r f_n)_n$ des dérivées d'ordre r converge simplement sur I vers g_r, si la suite $(\mathrm{D}^k f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers g_k, la limite f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\mathrm{D}^r f = g_r \text{ i.e. } \forall t \in I,\ \frac{d^r}{dt^r}\Big(\lim_n f_n(t)\Big) = \lim_n\Big(\frac{d^r}{dt^r}\big(f_n(t)\big)\Big)$$

PREUVE. La démonstration utilise une récurrence sur k ; le cas $k = 1$ est le théorème précédent.

Si la suite $(f_n)_n$ vérifie les hypothèses du théorème au rang $k+1$, la suite $(f_n')_n$ vérifie les hypothèses au rang k et, grâce à l'hypothèse de récurrence, g_1, la limite de $(f_n')_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$. La remarque précédente, montre que la convergence de $(f_n')_n$ vers g_1 est uniforme sur tous les segments de I. Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème de dérivation ($k = 1$) : f est $\mathcal{C}^1$, $f' = g_1$; ce qui montre que f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. cqfd

9.2 Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

Toujours la même technique : utilisation de la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles de la série : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$; on sait dériver terme à terme une combinaison d'un nombre fini de fonctions, et

$$S' = \sum_{k=0}^{n} u_k' \text{ et } \mathrm{D}^r S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}^r u_k$$

pourvu que les u_k soient dérivables à l'ordre r.

Théorème 9.4 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions).
Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, si la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et si la série des dérivées $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, la somme de la série $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\mathrm{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{D}\,u_n \text{ i.e. } \forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(t)$$

Preuve. $(S_n)_n$ est une suite de fonctions de class $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers la somme S de la série $\sum u_n$; la suite $(S'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la somme de la série $\sum u'_n$ (qui est donc continue). Par application du théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions, S est de classe $\mathcal{C}^1$ et S' est la somme de la série $\sum u'_n$.

En prime, la convergece de la série $\sum u_n$ est uniforme sur tous les segments de I. cqfd

Théorème 9.5 (Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).

Si $(u_n)_n$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, si, pour tout $r \in [\![0, k-1]\!]$, la série $\sum \mathrm{D}^r u_n$ converge simplement sur I et si la série $\mathrm{D}^r u_n$ converge uniformément sur tout segment de I, la somme de la série $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall r \in [\![1, k]\!],\ \mathrm{D}^r\Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{D}^r u_n$$

Preuve. Application à $(S_n)_n$ de l'extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ du théorème de la dérivation de la limite d'une suite de fonctions. cqfd

9.3 Dérivée de la fonction exponentielle

Rappelons que la fonction exponentielle est la somme de la série $\sum z^n/n!$, série absolument convergente pour tout z de $\mathbf{C}$.

Théorème 9.6 (Dérivée de l'exponentielle).

L'application $e_z : t \mapsto \exp tz$, où z est un nombre complexe, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\mathrm{D}\, e_z = z\, e_z \text{ i.e. } \forall t \in \mathbf{R},\ \frac{d}{dt}\Big(\exp tz\Big) = z \exp tz$$

Preuve. Posons $u_n(t) = z^n t^n/n!$; les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$), la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $a > 0$ et tout $t \in [-a, a]$,

$$|u'_n(t)| = \Big|\frac{z^n}{(n-1)!} t^{n-1}\Big| = \frac{|z|^n}{(n-1)!}|t|^{n-1} \leqslant \frac{|z|^n}{(n-1)!} a^{n-1} \tag{9.4}$$

ce qui montre la convergence normale donc uniforme sur $[-a, a]$ de la série $\sum u'_n$. La somme de la série $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \frac{d}{dt}\Big(\exp tz\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t) = \sum_{n>0} \frac{z^n}{(n-1)!} t^{n-1} = z \sum_{n>0} \frac{(zt)^{n-1}}{(n-1)!} = z \exp zt \tag{9.5}$$

e_z est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $\mathrm{D}\, e_z = z\, e_z$; par récurrence, e_z est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, et ceci pour tout k, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. cqfd

10 Intégrales dépendant de ses bornes

10.1 Intégrale du type $x \mapsto \int_{t=a}^{x} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$

Rappelons que, si $\mathbf{f}$ est une fonction continue sur I, $\mathbf{F} : x \mapsto \int_{t=a}^{x} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $\mathbf{f}$ nulle en a, ce qui montre que $\mathbf{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I,\ \mathbf{F}'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\int_{t=a}^{x} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \mathbf{f}(x)$$

Si $\mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, $\mathbf{F}$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, puisque $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Si $\mathbf{f}$ est continue par morceaux sur I, $\mathbf{F}$ est encore la primitive de $\mathbf{f}$ nulle en a ; $\mathbf{F}$ est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I ; la formule de dérivation est valable en tout point de continuité de $\mathbf{f}$.

10.2 Intégrale du type $x \mapsto \int_{t=u(x)}^{v(x)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t$

Notons $\mathbf{F}$ une primitive de $\mathbf{f}$ sur I ; nous pouvons écrire

$$\mathbf{g}(x) = \int_{t=u(x)}^{v(x)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{F}\big(v(x)\big) - \mathbf{F}\big(u(x)\big)$$

On obtient le résultat suivant : si $\mathbf{f}$ est une fonction continue sur I, si u et v sont deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur J à valeurs dans I, $\mathbf{g}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J dont la dérivée se calcule par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(\int_{t=u(x)}^{v(x)} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t\Big) &= \frac{d}{dx}\Big(\mathbf{F}\big(v(x)\big) - \mathbf{F}\big(u(x)\big)\Big)\\ &= \mathbf{F}'\big(v(x)\big)v'(x) - \mathbf{F}'\big(u(x)\big)u'(x) = \mathbf{f}\big(v(x)\big)v'(x) - \mathbf{f}\big(u(x)\big)u'(x) \qquad (10.1)\end{aligned}$$

formule à ne pas apprendre par cœur, mais à retrouver dans chaque application.

11 Intégrales dépendant d'un paramètre

Nous étudions dans cette section les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, par exemple les fonctions J_n, $n \in \mathbf{N}$

$$J_n : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{t=0}^{\pi} \cos(x \sin t - nt)\,\mathrm{d}t$$

que Bessel introduisit pour la première fois en 1817 lors de l'étude d'un problème de Kepler, et employa, sept ans plus tard, pour étudier les perturbations planétaires.

Dans cette section, A désigne un intervalle de $\mathbf{R}$; à toute fonction f continue sur $A \times [a,b]$ et à valeurs réelles ou complexes, on associe la fonction g définie sur A par la relation

$$g(x) = \int_{t=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

$g(x)$ a bien un sens puisque $t \mapsto f(x,t)$ est une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

11.1 Continuité sous le signe $\int$

Théorème 11.1 (Continuité des intégrales paramétrées sur un segment).
Si f est une fonction numérique continue sur $A \times [a,b]$, la fonction

$$g : x \in A \mapsto \int_{t=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est une fonction continue sur A.

Preuve. (Hors programme)

Soit x_0 un point intérieur à A ; on peut alors trouver un segment $[c,d]$ contenu dans A tel que $x_0 \in]c,d[$. La continuité de f sur $A \times [a,b]$ implique l'uniforme continuité de f sur la partie compacte $[c,d] \times [a,b] = \Delta$, soit

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,t) \in \Delta,\ \forall (x',t') \in \Delta,\\ &\qquad |x - x'| \leqslant \eta \text{ et } |t - t'| \leqslant \eta \implies \big|f(x,t) - f(x',t')\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{(b-a)}\end{aligned}$$

En particulier,

$$\forall t \in [a,b],\ \forall (x,x') \in [c,d]^2,\ |x-x'| \leqslant \eta \implies \bigl|f(x,t)-f(x',t)\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

et, dans ces conditions,

$$\bigl|g(x)-g(x')\bigr| = \Bigl|\int_{t=a}^{b} \bigl(f(x,t)-f(x',t)\bigr)\,\mathrm{d}t\Bigr| \leqslant \int_{t=a}^{b} \bigl|f(x,t)-f(x',t)\bigr|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t=a}^{b} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = \varepsilon$$

Ainsi, $|x-x_0| \leqslant \eta$ implique $\bigl|g(x)-g(x_0)\bigr| \leqslant \varepsilon$; la fonction g est donc continue au point x_0 et, puisque x_0 est un point quelconque de l'intérieur de A, g est continue sur l'intérieur de A.

La démonstration est analogue dans le cas où x_0 est une extrémité de A.

cqfd

Exemple 11.1. Puisque $(x,t) \mapsto \cos(x\sin t - nt)$ est continue sur $\mathbf{R} \times [0,2\pi]$, les fonctions J_n sont continues sur $\mathbf{R}$.

11.2 Dérivation sous le signe $\int$

Théorème 11.2 (Formule de Leibniz).

Lorsque f est continue sur $A \times [a,b]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times [a,b]$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\boxed{g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Bigl(\int_{t=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}t\Bigr) = \int_{t=a}^{b} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t}$$

Preuve. (Hors programme).

Soient x_0 un point intérieur à I et $[c,d]$ un segment de I tel que $x_0 \in]c,d[$. La continuité de la fonction $\partial f/\partial x$ sur $A \times [a,b]$ implique son uniforme continuité sur la partie compacte compacte $\Delta = [c,d] \times [a,b]$, ce qui donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,t) \in \Delta,\ \forall (x',t') \in \Delta,$$
$$|x-x'| \leqslant \eta \text{ et } |t-t'| \leqslant \eta \implies \Bigl|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x',t')\Bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

Soit $\psi : u \mapsto f(x_0+u,t) - u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$; la fonction ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $u=0$ et $\psi'(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+u,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$; pour $|u| \leqslant \eta$ tel que $x_0+u \in [c,d]$, $|\psi'(u)| \leqslant \varepsilon/(b-a)$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis : pour $|h| \leqslant \eta$ tel que $x_0+h \in [c,d]$, on a

$$\bigl|\psi(h)-\psi(0)\bigr| = \Bigl|f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Bigr| \leqslant |h|\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ainsi, en formant le taux d'accroissement de g en x_0, il vient

$$\begin{aligned}
\Bigl|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - \int_{t=a}^{b} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\Bigr| &= |h|^{-1}\Bigl|\int_{t=a}^{b} \Bigl[f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Bigr]\,\mathrm{d}t\Bigr| \\
&\leqslant |h|^{-1}\int_{t=a}^{b} \Bigl|f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Bigr|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant |h|^{-1}\int_{t=a}^{b} |h|\frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - \int_{t=a}^{b} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction g est donc dérivable au point x_0 et

$$g'(x_0) = \int_{t=a}^{b} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque x_0 est un point quelconque de l'intérieur de A, la fonction g est donc dérivable sur l'intérieur de A.

La démonstration est analogue dans le cas où x_0 est une extrémité de A.

Le théorème de continuité des intégrales paramétrées sur un segment, montre la continuité de g' sur l'intervalle A ; la fonction g est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle A. cqfd

Théorème 11.3 (Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).

Lorsque f est continue sur $A \times [a, b]$ et admet des dérivées partielles $\frac{\partial^r f}{\partial x^r}$ continue sur $A \times [a, b]$ jusqu'à l'ordre k, g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et

$$\forall r \in [\![1, k]\!],\ g^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r}\Big(\int_{t=a}^{b} f(x, t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{t=a}^{b} \frac{\partial^r f}{\partial x^r}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve. Par récurrence sur k. cqfd

Exemples 11.2. Puisque $(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(x \sin t)\big) = \cos(x \sin t + \frac{\pi}{2}) \sin t$ est continue sur $\mathbf{R} \times [0, \pi]$, J_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$J_0'(x) = \frac{1}{\pi} \int_{t=0}^{\pi} \cos(x \sin t + \frac{\pi}{2}) \sin t\,\mathrm{d}t$$

De même, pour tout entier k, $(x, t) \mapsto \frac{\partial^k}{\partial x^k}\big(\cos(x \sin t)\big) = \cos(x \sin t + k\frac{\pi}{2})(\sin t)^k$ est continue sur $\mathbf{R} \times [0, \pi]$, J_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\mathrm{D}^k\, J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{t=0}^{\pi} \cos(x \sin t + k\frac{\pi}{2}) \sin t\,\mathrm{d}t$$

J_0 est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

De même, les fonctions J_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Théorème 11.4 (Division des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$; alors la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Preuve. En utilisant le changement de variable $t = x\,u$, $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$, on obtient, pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_{t=0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=0}^{1} f'(xu)\,\mathrm{d}u = g(x)$$

Cette formule est encore valable pour $x = 0$. Or, $(x, u) \mapsto f'(x\,u)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \times [0, 1]$ et $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\big(f'(x\,u)\big) = u^k f^{(k+1)}(x\,u)$; ainsi g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall k \in \mathbf{N},\ g^{(k)}(0) = \int_{u=0}^{1} u^k f^{(k+1)}(0)\,\mathrm{d}u = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$$

cqfd

11.3 Intégration sous le signe $\int$

Théorème 11.5 (Formule de Fubini).

Lorsque f est continue sur $A \times [a,b]$, pout tout segment $[c,d]$ inclus dans A, on a

$$\boxed{\int_{x=c}^{d} \Big[\int_{t=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}x = \int_{t=a}^{b} \Big[\int_{x=c}^{d} f(x,t)\,\mathrm{d}x)\Big]\,\mathrm{d}t}$$

Preuve. (Hors programme).

Posons $g(y) = \int_{x=c}^{y} \big[\int_{t=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}t\big]\,\mathrm{d}x$ et $h(y) = \int_{t=a}^{b} \big[\int_{x=c}^{y} f(x,t)\,\mathrm{d}x)\big]\,\mathrm{d}t$.

Puisque $x \mapsto \int_{t=a}^{b} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A, la fonction g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $g'(y) = \int_{t=a}^{y} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Puisque $(x,t) \mapsto \int_{x=c}^{d} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ et $(y,t) \mapsto \partial/\partial y\big(\int_{x=c}^{y} f(x,t)\,\mathrm{d}x\big) = f(y,t)$ sont continues sur $A \times [a,b]$, la fonction h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $h'(y) = \int_{t=a}^{b} f(y,t)\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions g et h ont la même dérivée sur l'*intervalle* A et la même valeur 0 au point $y = c$; ces fonctions sont donc identiques et $g(d) = h(d)$. cqfd

Exemple 11.3. Calcul de $\int_{t=0}^{\pi} \big(\ln(b-\cos t) - \ln(a-\cos t)\big)\,\mathrm{d}t$ pour $1 < a < b$.

On remarque que $\ln(b-\cos t) - \ln(a-\cos t) = \int_{x=a}^{b} (x-\cos t)^{-1}\,\mathrm{d}x$ et

$$\int_{t=0}^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\pi} \Big[\int_{x=a}^{b} \frac{1}{x-\cos t}\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}t = \int_{x=a}^{b} \Big[\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{x-\cos t}\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}x$$

Le changement de variable $u = \tan(t/2)$, $t = 2\arctan u$, $\mathrm{d}t = 2(1+u^2)^{-1}\,\mathrm{d}u$ permet le calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-\cos t} &= \int_{u=0}^{+\infty} \frac{1}{x - \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int_{u=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(x+1)u^2 + (x-1)} \\
&= \frac{2}{x+1} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{x+1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \arctan u\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\Big|_{u=0}^{u\to+\infty} = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Les calculs s'achèvent par

$$\int_{t=0}^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_{x=a}^{b} \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \pi\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)\Big|_{x=a}^{x=b} = \pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

Chapitre 10

Intégrale des fonctions numériques sur un intervalle

Sommaire

1 Intégrale des fonctions positives

Le but de ce paragraphe est de donner un sens, ou de n'en pas donner, à des symboles comme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 (-\ln x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

symboles que l'on peut encore écrire :

$$\int_{\mathbf{R}} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{]0,1]} (-\ln x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{[0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Pour $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, il y a quatre types d'intervalles d'extrémités a et b : $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$; ce qui donne quatre types d'intégrales possibles, qui doivent rester *compatibles* avec l'intégrale sur un segment.

Notation. L'espace des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I et à valeurs positives est noté $\mathcal{CM}(I,\mathbf{R}_+)$ ou encore $\mathcal{CM}^+(I)$.

1.1 Intégrale d'une fonction sommable

Définition 1.1 (Fonction intégrable, sommable).
Une fonction $f \in \mathcal{CM}^+(I)$ est dite *intégrable* ou *sommable* sur l'intervalle I, si, et seulement si, l'ensemble $\big\{\int_S f \;/\; S \text{ segment } \subset I\big\}$ est majoré, *i.e.*

$$\boxed{f \text{ est sommable sur } I \iff \exists M > 0,\ \forall S \text{ segment } \subset I,\ \int_S f \leqslant M}$$

La non-sommabilité de f sur l'intervalle I s'exprime par

$$f \text{ n'est pas sommable sur } I \iff \forall M > 0,\ \exists S \text{ segment } \subset I,\ \int_S f > M$$

Définition 1.2 (Intégrale d'une fonction).
Si f est une fonction sommable sur l'intervalle I, on appelle *intégrale de f sur I*, et on la note $\int_I f$, la borne supérieure de $\big\{\int_S f \;/\; S \text{ segment } \subset I\big\}$.

$$\boxed{\int_I f = \sup\Big\{\int_S f \Big/ S \text{ segment } \subset I\Big\}}$$

Si f n'est pas sommable sur l'intervalle I, alors $\sup_S\{\int_S f\} = +\infty$.

Remarque. Toute fonction positive et continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est sommable sur ce segment et son intégrale est égale à l'intégrale habituelle.

1.2 Sommabilité par réunion croissante de segments

Au lieu de prendre la borne supérieure des intégrales $\int_S f$ sur tous les segments S de I, on peut se restreindre à une suite de segments bien choisis.

Définition 1.3 (Suite croissante de segments vers I).
On dit que la suite de segments $(S_n)_n$ est *croissante vers I* si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ S_n \subset S_{n+1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n = I$$

Remarques.

Notons a_n et b_n les extrémités de S_n, soit $S_n = [a_n, b_n]$; S_n est inclus dans S_{n+1} si, et seulement si, $a_n \geqslant a_{n+1}$ et $b_n \leqslant b_{n+1}$; la suite $(S_n)_n$ est croissante si, et seulement si, $(a_n)_n$ est une suite monotone décroissante et $(b_n)_n$ monotone croissante et $\bigcup_n [a_n, b_n]$ est un intervalle d'extrémités $a = \lim a_n$ et $b = \lim_n b_n$.

La suite $(S_n)_n$ est croissante vers $[a, b[$ si, et seulement si, $(a_n)_n$ est une suite décroissante qui stationne en a et $(b_n)_n$ est une croissante non stationnaire de limite b.

Soient $a < b$ deux nombres réels distincts et n_0 un entier tel que $a \leqslant b - 1/n_0 < b$; alors la suite $\big([a, b - 1/n]\big)_{n \geqslant n_0}$ est croissante vers $[a, b[$.

La suite $\big([a, n]\big)_{n > a}$ est croissante vers $[a, +\infty[$.

Si $I =]a, b]$, on a des résultats analogues ; de même pour $I =]a, b[$.

Proposition 1.1. *Si $(S_n)_n$ est une suite de segments croissante vers I, pour tout segment K inclus dans I, il existe un entier p tel que $K \subset S_p \subset I$.*

Proposition 1.2. *Soit $f \in \mathcal{CM}^+(I)$; alors*

(*i*) *f est sommable sur I si, et seulement si, il existe une suite $(S_n)_n$ de segments croissante vers I et un nombre $M > 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \int_{S_n} f \leqslant M$$

(*ii*) *si f est sommable sur I, alors pour* toute *suite $(T_n)_n$ de segments croissante vers I*

$$\int_I f = \sup_n \int_{T_n} f = \lim_n \int_{T_n} f$$

PREUVE.

(*i*)

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tout segment $K \subset I$ est contenu dans un S_n et les inégalités

$$\int_K f \leqslant \int_{S_n} f \leqslant M$$

montrent que f est intégrable sur I.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Partons d'une suite $(T_n)_n$ de segments croissante vers I. Puisque f est intégrable sur I, la propriété de la borne supérieure montre que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \exists K_n \text{ segment} \subset I, \ \int_I f - \frac{1}{n+1} < \int_{K_n} f \leqslant \int_I f$$

Il suffit d'extraire de $(T_n)_n$ une sous-suite $\big(T_{\varphi(n)}\big)_n$ telle que $K_n \subset T_{\varphi(n)}$ pour tout n. La suite $(S_n)_n = \big(T_{\varphi(n)}\big)_n$ convient puisque

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \int_I f - \frac{1}{n+1} < \int_{K_n} f \leqslant \int_{K_{\varphi(n)}} f = \int_{S_n} f \leqslant \int_I f$$

(*ii*) Si $(T_n)_n$ est une suite de segments croissante vers I, la suite $\big(\int_{T_n} f\big)_n$ est une suite croissante de réels (positifs), majorée par $\int_I f$ donc convergente vers sa borne supérieure et

$$\lim_n \int_{T_n} f = \sup_n \int_{T_n} f \leqslant \int_I f$$

Tout segment K de I est contenu dans un des T_p et

$$\int_K f \leqslant \int_{T_p} f \leqslant \sup_n \int_{T_n} f$$

Ainsi, $\sup_n \int_{T_n} f$ est un majorant des intégrales $\int_K f$, ce qui donne

$$\int_I f = \sup\Big\{\int_K f \Big/ K \text{ segment contenu dans } I\Big\} \leqslant \sup_n \int_{T_n} f$$

cqfd

Théorème 1.3 (Intégrabilité par réunion croissante de segments).
Soit $(S_n)_n$ est une suite de segments croissante vers I ; $f \in \mathcal{CM}^+(I)$ est intégrable sur I si, et seulement si, $\lim_n \int_{S_n} f$ existe dans $\mathbf{R}$; dans ce cas,

$$\int_I f = \lim_n \int_{S_n} f = \sup_n \int_{S_n} f$$

Sinon, f n'est pas intégrable sur I et $\lim_n \int_{S_n} f = \sup_n \int_{S_n} f = +\infty$.

Exemples 1.1. Cas des primitives explicitées par des fonctions élémentaires.
$\int_{]0,1]}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$: on utilise la suite de segments $S_n = [1/n, 1]$ et

$$\int_{[1/n,1]}(-\ln t)\,\mathrm{d}t = -t\ln t - t\Big|_{t=1/n}^{t=1} \underset{n}{\longrightarrow} 1 = \int_{]0,1]}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$$

$\int_{]0,+\infty[} t^{-2}\,\mathrm{d}t$: on utilise la suite de segments $S_n = [\frac{1}{n}, n]$ et

$$\int_{[1/n,n]} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\Big|_{t=\frac{1}{n}}^{t=n} \underset{n}{\longrightarrow} +\infty \textit{ i.e. } t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ n'est pas intégrable sur }]0,+\infty[$$

Cas des primitives qui ne sont pas explicitées par des fonctions élémentaires.
$\int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t$: on utilise la suite de segments $S_n = [-n, n]$ et

$$\int_{[-n,n]} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^n \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t + 2\int_1^n \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \geqslant 1$, $\exp(-t^2/2) \leqslant t\exp(-t^2/2)$ et

$$\int_1^n \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^n t\exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = -\exp(-t^2/2)\Big|_{t=1}^{t=n} < \exp(-1/2)$$

ce qui donne

$$\int_{[-n,n]} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t < 2\int_0^1 \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t + 2\exp(-1/2)$$

La fonction $t \mapsto \exp(-\frac{t^2}{2})$ est donc intégrable sur $\mathbf{R}$. On démontrera que

$$\boxed{\int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$$

1.3 Intégrabilité sur un segment

Théorème 1.4 (Intégrales sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$).
Toute fonction positive et continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est intégrable sur ce segment, ainsi que sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$; les quatre intégrales sont égales à l'intégrale habituelle, celle du chapitre précédent.

Preuve. $[a,b]$ est un segment particulier de $I=[a,b]$; donc, $\sup_S \int_S f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f$.

Dans le cas $I=[a,b[$, posons $S_n=[a,b-1/n]$ pour $n>1/(b-a)$, et appelons F une primitive de f sur $[a,b]$; alors

$$\int_{S_n} f = \int_a^{b-1/n} f(t)\,\mathrm{d}t = F(b-1/n)-F(a) \underset{n}{\longrightarrow} F(b)-F(a) = \int_a^b f$$

puisque F est continue sur $[a,b]$. La fonction f est donc intégrable sur $[a,b[$ et $\int_{[a,b[} f = \int_a^b f$.

La démonstration est analogue pour $I=]a,b]$, on pose $S_n=[a+1/n,b]$ pour $n>1/(b-a)$, et pour $I=]a,b[$, on pose $S_n=[a+1/n,b-1/n]$ pour $n>\big(2(b-a)\big)^{-1}$. cqfd

Remarques.

L'extension de l'intégrale est donc compatible avec l'intégrale précédente.

Une démonstration analogue montre que si f est intégrable sur $[a,b[$, f est intégrable sur $]a,b[$ et les deux intégrales sont égales. On a un résultat identique pour $I=]a,b]$.

1.4 Intégrabilité par intersection

Théorème 1.5 (Intégrabilité par intersection).

Soient I un intervalle et $c\in I$; posons $I^g=I\cap]-\infty,c]$ et $I^d=I\cap[c,+\infty[$. Pour $f\in\mathcal{CM}^+(I)$, f est intégrable sur I si, et seulement si, f est intégrable sur I^g et I^d et dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I^g} f + \int_{I^d} f$$

Preuve. Soit $(S_n)_n$ une suite de segments croissante vers I ; $(S_n^g)_n = (S_n\cap]-\infty,c])_n$ (resp. $(S_n^d)_n=(S_n\cap[c,+\infty[)_n)$ est une suite de segments croissante vers I^g (resp. I^d) et la relation de Chasles donne $\int_{S_n} f = \int_{S_n^g} f + \int_{S_n^d} f$.

Si f est intégrable sur I, les inégalités $\int_{S_n^g} \leqslant \int_{S_n} f \leqslant \int_I f$ (resp. $\int_{S_n^d} \leqslant \int_{S_n} f \leqslant \int_I f$) montrent que f est intégrable sur I^g (resp. I^d).

Réciproquement, si f est intégrable sur I^g et I^d, les inégalités $\int_{S_n} f = \int_{S_n^g} f + \int_{S_n^d} f \leqslant \int_{I^g} f + \int_{I^d} f$ montrent que f est intégrable sur I.

Dans ce cas, $\lim_n \int_{S_n} f = \lim_n \int_{S_n^g} f + \lim_n \int_{S_n^d} f$, soit $\int_I f = \int_{I^g} f + \int_{I^d} f$. cqfd

Remarques.

Montrer l'intégrabilité sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, c'est montrer l'intégrabilité sur les intervalles $]a,c]$ et $[c,b[$ pour c choisi dans $]a,b[$.

Montrer l'intégrabilité sur l'intervalle $[a,b[$, c'est montrer l'intégrabilité sur l'intervalle $[c,b[$ pour c choisi dans $]a,b[$, puisque toute fonction positive et continue par morceaux est intégrable sur le segment $[a,c]$.

Théorème 1.6 (Additivité de l'intégrale).

Soient $f\in\mathcal{CM}^+([a,b[)$ et $c\in[a,b[$; alors f est intégrable sur $[a,b[$ si, et seulement si, f est intégrable sur $[c,b[$ et, dans ce cas,

$$\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$$

Soient $f\in\mathcal{CM}^+(]a,b[)$ et $c\in[a,b[$; alors f est intégrable sur $]a,b[$ si, et seulement si, f est intégrable sur $]a,c]$ et *sur $[c,b[$ et, dans ce cas,*

$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f$$

1.5 Sommabilité sur $[a,b[$ à l'aide d'une primitive

Rappelons le résultat suivant sur les fonctions réelles, continues et monotones.

Lemme 1.7. *Soient F une fonction réelle définie sur $[a,b[$ et $(b_n)_n$ une suite de $[a,b[$, monotone croissante et de limite b ; alors*

(*i*) *si F est continue, l'existence de $\lim_{t\uparrow b} F(t)$ implique l'existence de $\lim_n F(b_n)$ et les limites sont égales ;*

(*ii*) *si F est monotone croissante, F est majorée si, et seulement si la suite $(F(b_n))_n$ est majorée, et dans ce cas $\lim_{t\uparrow b} F(t) = \lim_n F(b_n)$;*

(*iii*) *si F est monotone décroissante, F est minorée si, et seulement si la suite $(F(b_n))_n$ est minorée, et dans ce cas $\lim_{t\uparrow b} F(t) = \lim_n F(b_n)$;*

Preuve.

(*i*) C'est bien connu ;

(*ii*) Tout majorant de F sur $[a,b[$ est aussi un majorant de la suite $(F(b_n))_n$. Puisque $(b_n)_n$ admet b pour limite, pour tout $t \in [a,b[$ il existe un entier n_t tel que $t \leqslant b_{n_t} < b$, et, F étant croissante, $F(t) \leqslant F(b_n)$; ainsi, tout majorant de la suite $(F(b_n))_n$ est aussi un majorant de F sur $[a,b[$. Par conséquent, $\sup_{t\in[a,b[} F(t) = \sup_n F(b_n)$, ce qui montre l'égalité des limites.

(*iii*) La démonstration est identique.

cqfd

Théorème 1.8 (Sommabilité et accroissement d'une primitive).
Soit f une fonction positive et continue par morceaux sur $[a,b[$; alors

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est intégrable sur } [a,b[\iff F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est majoré ;} \\ \text{dans ce cas } \displaystyle\int_{[a,b[} f = \lim_{x\uparrow b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}}$$

sinon $\qquad \lim_{x\uparrow b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$

Preuve. $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b[$ et croissante (f est positive). Soit $(b_n)_n$ une suite croissante de limite b ; $([a,b_n])_n$ est une suite de segments croissante vers $[a,b[$ et f est intégrable sur $[a,b[$ si, et seulement si, la suite $(\int_{[a,b_n]} f)_n = (F(b_n))_n$ est majorée. Le lemme précédent permet de conclure.

cqfd

Exemples 1.2. $\int_{]0,1]}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$: on considère

$$\int_x^1 (-\ln t)\,\mathrm{d}t = -t\ln t - t\Big|_{t=x}^{t=1} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 1 = \int_{]0,1]} (-\ln t)\,\mathrm{d}t$$

$\int_{[0,1[}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$: considérons

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t\Big|_{t=0}^{t=x} \xrightarrow[x\uparrow 1]{} \frac{\pi}{2} = \int_{[0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Proposition 1.9 (Intégrale de Bertrand).
$t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ *est intégrable sur $[2,+\infty[$ si, et seulement si, $\beta > 1$.*

Preuve. Le changement de variable $u = \ln t$, $\mathrm{d}u = t^{-1}\,\mathrm{d}t$ permet d'écrire

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^{-\beta+1} - (\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln u = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

et $\lim\limits_{x\uparrow+\infty} \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ existe si, et seulement si, $-\beta + 1 < 0$. cqfd

1.6 Les références fondamentales

1.6.1 La fonction exponentielle

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pour } \lambda \in \mathbf{R},\ t \mapsto \exp(-\lambda t) \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[\iff \lambda > 0 \\ \text{Dans ce cas, } \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \exp(-\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \end{array}}$$

Preuve. Si $\lambda \neq 0$, $\int_0^x \exp(-\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-\lambda}(\exp(-\lambda x) - 1)$ a une limite (finie) quand $x \to +\infty$ si, et seulement si $\lambda > 0$; dans ce cas, cette limite est $\frac{1}{\lambda}$. Si $\lambda = 0$, $\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \underset{x\uparrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. cqfd

1.6.2 La fonction logarithme

$$\boxed{t \mapsto -\ln t \text{ est intégrable sur }]0, 1] \text{ et } \int_{]0,1]} (-\ln t)\,\mathrm{d}t = 1}$$

1.6.3 Les intégrales de Riemann

Soient $a > 0$ et $\alpha \in \mathbf{R}$; $t \mapsto t^{-\alpha}$ est-elle intégrable sur $]0, a]$, sur $[a, +\infty[$, sur $]0, +\infty[$?

$$\boxed{\begin{array}{c} t \mapsto t^{-\alpha} \text{ est intégrable sur }]0, a] \iff \alpha < 1\,; \\ t \mapsto t^{-\alpha} \text{ est intégrable sur } [a, +\infty[\iff \alpha > 1\,; \\ t \mapsto t^{-\alpha} \text{ N'EST PAS INTÉGRABLE sur }]0, +\infty[. \end{array}}$$

Preuve.

Soit $I =]0, a]$; calculons

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{t=x}^{t=a} = \dfrac{a^{-\alpha+1} - x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \\ \ln t\Big|_{t=x}^{t=a} = \ln a - \ln x & \underset{x\downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $I = [a, +\infty[$, calculons

$$\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{t=a}^{t=x} = \dfrac{x^{-\alpha+1} - a^{\alpha-1}}{-\alpha+1} & \underset{n}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \\ \ln t\Big|_{t=a}^{t=x} = \ln x - \ln a & \underset{n}{\longrightarrow} +\infty \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $I =]0, +\infty[$, posons $S_n = [1/n, n]$ et calculons

$$\int_{S_n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_{n^{-1}}^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left.\begin{cases} \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{t=n^{-1}}^{t=n} = \dfrac{n^{-\alpha+1} - n^{\alpha-1}}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln t\Big|_{t=n^{-1}}^{t=n} = 2\ln n & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}\right\} \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$$

cqfd

Remarques. La fonction $t \mapsto (b-t)^{-\alpha}$ (resp. $t \mapsto (t-b)^{-\alpha}$) est intégrable sur l'intervalle $[c, b[$ avec $c < b$ (resp. sur l'intervalle $]b, c]$ avec $b < c$) si, et seulement si, $\alpha < 1$.

La fonction $t \mapsto (t-b)^{-\alpha}$ n'est *jamais* intégrable sur l'intervalle $]b, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto (1+t^\alpha)^{-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2 Opérations sur les fonctions intégrables

2.1 Sommabilité par combinaison linéaire à coefficients positifs

Théorème 2.1 (Combinaison linéaire de fonctions sommables).
Soient f et g deux éléments de $\mathcal{CM}^+(I)$; alors

(*i*) *si f et g sont sommables sur I, $f+g$ est sommable sur I et*

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

(*ii*) *si f est sommable sur I, pour tout $\lambda > 0$, λf est sommable sur I et*

$$\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$$

Preuve. Soit $(S_n)_n$ une suite de segments croissante vers I ;

(*i*) $\forall n,\ \int_{S_n}(f+g) = \int_{S_n} f + \int_{S_n} g \underset{n}{\longrightarrow} \int_I f + \int_I g$; donc $f+g$ est sommable sur I et $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

(*ii*) $\int_{S_n} \lambda f = \lambda \int_I f \underset{n}{\longrightarrow} \lambda \int_I f$ ce qui montre la sommabilité de λf et l'égalité $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

cqfd

Remarque. Pour des raisons techniques (les fonctions considérées sont à valeurs réelles positives pour le moment), les scalaires sont positifs ; dans la prochaine section, les scalaires seront des nombres réels quelconques, et même des nombres complexes.

2.2 Sommabilité par comparaison

Théorème 2.2 (Comparaison globale).
Soient f et $g \in \mathcal{CM}^+(I)$ telles que : $\forall t \in I,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$; alors

(*i*) *si g est sommable sur I, f est sommable sur I et $0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g$;*

(*ii*) *si f n'est pas sommable sur I, g n'est pas sommable sur I.*

Preuve. Soit $(S_n)_n$ une suite de segments croissante vers I ; alors

$$0 \leqslant f \leqslant g \implies \forall n,\ 0 \leqslant \int_{S_n} f \leqslant \int_{S_n} g$$

(*i*) si g est sommable sur I, $\int_I g$ est un majorant de $\int_{S_n} f$, ce qui montre que f est sommable sur I et $0 \leqslant \int_I f \leqslant \int_I g$;

(*ii*) si f n'est pas sommable sur I, $sup_n \int_{S_n} f = +\infty$, donc $\sup_n \int_{S_n} g = +\infty$ et g n'est pas sommable sur I.

cqfd

Remarque. Ce théorème est essentiel : il permet de montrer la sommabilité d'une fonction sans en calculer une primitive.

Corollaire. *Soient f et $g \in \mathcal{CM}^+(I)$; s'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que*

$$\forall t \in I, \qquad 0 \leqslant A\, f(t) \leqslant g(t) \leqslant B\, f(t)$$

alors, f est sommable sur I si, et seulement si, g est sommable sur I.

Preuve. Si f est sommable, alors $B\,f$ est sommable, et g est sommable par comparaison globale ($g \leqslant B\,f$). Si g est sommable, alors $\frac{1}{A}\,f$ est sommable ($A > 0$), et f est sommable par comparaison globale ($f \leqslant \frac{1}{A}\,g$). cqfd

Théorème 2.3 (Comparaison locale, intégrabilité sur $[a, b[$).
Soient f et $g \in \mathcal{CM}^+([a, b[)$;

(i) f est intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, il existe $c \in\,]a, b[$ tel que f soit intégrable sur $[c, b[$;

(ii) si $f \underset{b}{=} \mathrm{O}(g)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique l'intégrabilité de f sur $[a, b[$, et la non-intégrabilité de f sur $[a, b[$ implique la non-intégrabilité de g sur $[a, b[$;

(iii) si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si, et seulement si, g est intégrable sur $[a, b[$.

Preuve.

(i) Déjà vu ; rappelons qu'une fonction continue par morceaux est intégrable sur tout segment ;

(ii) si $f \underset{b}{=} \mathrm{O}(g)$, il existe un voisinage $[c, b[$ de b et un nombre réel $M > 0$ tels que $\forall t \in [c, b[,\ f(t) \leqslant M\,g(t)$, ce qui assure l'intégrabilité de f sur $[c, b[$, et donc sur $[a, b[$;

(iii) si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $f \underset{b}{=} \mathrm{O}(g)$ et $g \underset{b}{=} \mathrm{O}(f)$, ce qui montre l'équivalence annoncée.

cqfd

2.2.1 Intégrale de Bertrand, suite et fin

$$\boxed{t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \text{ est intégrable sur } [2, +\infty[\iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)}$$

Preuve. La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}(\ln t)^{-\beta}$ est continue sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Le cas $\alpha = 1$ déjà été étudié.

Cas $\alpha > 1$; on pose $\alpha = 1 + 2\varepsilon$; ε est donc un nombre strictement positif et

$$f(t) = \frac{1}{t^{1+2\varepsilon}}(\ln t)^{-\beta} = \frac{1}{t^{1+\varepsilon}} \frac{(\ln t)^{-\beta}}{t^\varepsilon} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$$

Or, $t \mapsto t^{-(1+\varepsilon)}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$, ce qui assure l'intégrabilité de f.

Cas $\alpha < 1$; on pose $\alpha = 1 - \varepsilon$;t ε est dons un nombre strictement positif et

$$f(t) = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t} \frac{t^\varepsilon}{(\ln t)^\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t} = f(t) \frac{(\ln t)^\beta}{t^\varepsilon} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(f)$$

Or, $t \mapsto t^{-1}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$, ce qui assure la non-intégrabilité de f. cqfd

2.2.2 La fonction Γ

Définition 2.1. On note Γ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t}$$

Preuve. Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}e^{(x-1)\ln t}$; f_x est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de $t = 0$, $f_x(t) \underset{t=0}{\sim} t^{x-1} = t^{-(1-x)}$, ce qui montre que f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si, $1 - x < 0$, soit $x > 0$.

Au voisinage de $t = +\infty$, $f_x(t) = e^{-t/2}\,(e^{-t/2}t^{x-1}) \underset{t=+\infty}{=} \mathrm{O}(e^{-t/2})$, ce qui montre que f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$, sans condition sur x.

En conclusion, $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$. cqfd

Proposition 2.4 (Équation fonctionnelle de la fonction Γ).

$$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ \Gamma(n + 1) = n!}$$

Preuve. Utilisons la suite de segments $([1/n, n])_{n>1}$ croissante vers $]0, +\infty[$; ainsi

$$\Gamma(x) = \lim_n \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Une intégration par parties sur le segment $[1/n, n]$ s'impose et donne :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}t^{x}\Big|_{t=\frac{1}{n}}^{t=n} - \int_{\frac{1}{n}}^{n} (-e^{-t})xt^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim_n n^x e^{-n} = 0 = \lim_n (\frac{1}{n})^x e^{-1/n}$. Un passage à la limite sur n donne :

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}xt^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

$\Gamma(1) = \int_{[0,+\infty[} e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} = 1$.
Par récurrence, $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)\Gamma(n - 1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!$ cqfd

Proposition 2.5 (Convexité de la fonction Γ).
La fonction Γ est une fonction convexe sur $]0, +\infty[$

Preuve. Pour $t > 0$ fixé, $x \mapsto t^{x-1} = \exp\big((x - 1)\ln t\big)$ est une fonction convexe sur $\mathbf{R}$, car $\frac{d^2}{dx^2}(t^{x-1}) = (\ln t)^2 t^{x-1} > 0$. On en déduit que pour x et $y \in]0, +\infty[$ et $\lambda \in]0, 1[$

$$t^{\lambda x+(1-\lambda y)-1} = t^{\lambda(x-1)+(1-\lambda)(y-1)} \leqslant \lambda t^{x-1} + (1 - \lambda)t^{y-1} \tag{2.1}$$

$$\text{et } (e^{-t} > 0) \quad e^{-t}t^{\lambda x+(1-\lambda y)-1} \leqslant \lambda e^{-t}t^{x-1} + (1 - \lambda)e^{-t}t^{y-1} \tag{2.2}$$

Le critère de comparaison globale montre

$$\begin{aligned}\Gamma\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) &= \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{\lambda x+(1-\lambda y)-1}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \lambda \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t + (1 - \lambda) \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{y-1}\,\mathrm{d}t = \lambda\Gamma(x) + (1 - \lambda)\Gamma(y) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

cqfd

2.3 Intégrabilité sur $[a, +\infty[$ à l'aide d'une série

2.3.1 Cas général

Proposition 2.6. *Soient $f \in \mathcal{CM}^+([a, +\infty[)$ et $(b_n)_n$ une suite croissante vers $+\infty$ de premier terme $b_0 = a$; alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si, et seulement si, la série $\sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et, dans ce cas*

$$\int_{[a,+\infty[} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve. La suite de segments $([a, b_n])_n$ est croissante vers $[a, +\infty[$; ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ intégrable sur } [a, +\infty[&\iff \exists \lim_n \int_{b_0}^{b_n} f \\ &\iff \exists \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f \qquad \text{(relation de Chasles)} \\ &\iff \text{la série } \sum \int_{b_n}^{b_{n+1}} f \text{ est convergente} \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$\int_{[a,+\infty[} f = \lim_n \int_a^{b_n} f = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f \tag{2.4}$$

cqfd

Exemple 2.1. $f : x \mapsto x(1 + x^6 \sin^2 x)^{-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$; utiliser $b_n = n\pi$ et montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n+1)\pi}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 x}\,\mathrm{d}x && \text{car...} \\ &= (n+1)\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 x} && \text{car...} \\ &= 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 x} && \text{car...} \\ &\leqslant 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (n\pi)^6 \left(\frac{2}{\pi}x\right)^2} && \text{car...} \\ &= 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (2n^3\pi^2 x)^2} && \text{car...} \\ &\leqslant 2(n+1)\pi \frac{1}{2n^3\pi^2} \frac{\pi}{2} = \frac{n+1}{2n^3} && \text{car...} \end{aligned}$$

La série $\sum u_n$ est convergente et la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarque.

Chère lectrice et cher lecteur, voici un exemple d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et qui n'est pas bornée puisque $f(n\pi) = n\pi$.

Par contre, une fonction *intégrable* sur $[a, +\infty[$ ne peut admettre que 0 comme limite en $+\infty$.

2.3.2 Cas d'une fonction monotone décroissante

Théorème 2.7 (Comparaison série-intégrale).
Soit $f \in \mathcal{CM}^+([0,+\infty[)$ une fonction monotone décroissante et $w_n = \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour $n \geqslant 1$; alors

(i) $\sum w_n$ est une série convergente à termes positifs ;

(ii) f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ est convergente, et, dans ce cas :

$$\int_{[n+1,+\infty[} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{[n,+\infty[} f$$

(iii) f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ est divergente, et, dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n}{\sim} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve. La décroissance de f donne les inégalités (faire un dessin) :

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f \leqslant f(n-1) \tag{2.5}$$

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \int_{n}^{n+1} f \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f \tag{2.6}$$

(i) Les inégalités (2.5) donnent :

$$0 \leqslant w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n) \tag{2.7}$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(f(k-1) - f(k)\big) \leqslant f(0) - f(n) \leqslant f(0) \tag{2.8}$$

La série $\sum w_n$ est convergente car série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par $f(0)$;

(ii) les inégalités (2.5) montrent que les séries $\sum f(n)$ et $\sum \int_{n-1}^n f$ sont de même nature ; ainsi, f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ est convergente.

Dans ce cas, les inégalités (2.6) donnent

$$\int_{n+1}^{m+1} f = \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} f = \int_{n}^{m} f \tag{2.9}$$

et, par passage à la limite sur $m \to +\infty$

$$\int_{[n+1,+\infty[} f \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{[n,+\infty[} f \tag{2.10}$$

(iii) si f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, $\lim_n \int_0^n f = +\infty$ et, puisque la suite des sommes partielles d'une série convergente est bornée, $\sum_{k=1}^n w_k = \int_0^n f - \sum_{k=1}^n f \underset{n}{=} \mathrm{o}(\int_0^n f)$. Ainsi $\int_0^n f \underset{n}{\sim} \sum_{k=1}^n f(k) \underset{n}{\sim} \sum_{k=0}^n f(k)$.

cqfd

Corollaire (Série de Bertrand).
La série $\sum n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Preuve. Le cas $\alpha \neq 1$ a été traité au chapitre des séries.
Cas ($\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$) ; pour $n \geqslant 3$, $(\ln n)^{-\beta} n^{-1} \geqslant n^{-1}$, ce qui assure la divergence de la série.
Cas ($\alpha = 1$ et $\beta > 0$) ; $f : t \mapsto t^{-1}(\ln t)^{-\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$; donc la série $\sum f(n)$ est convergente si, et seulement si, f est intégrable sur $[2, +\infty[$, soit si, et seulement si, $\beta > 1$. cqfd

Exemples 2.2. Appliquons le théorème de comparaison série-intégrale aux séries de Riemann.

La fonction $t \mapsto (t+1)^{-1}$ est continue, décroissante et non intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \underset{n}{\sim} \int_0^{n-1} \frac{1}{t+1} = \ln n \tag{2.11}$$

Pour $0 < \alpha < 1$, la fonction $t \mapsto (t+1)^{-\alpha}$ est continue, décroissante et non intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \underset{n}{\sim} \int_0^{n-1} \frac{1}{(t+1)^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \underset{n}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{2.12}$$

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto (t+1)^{-\alpha}$ est continue, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui montre que

$$\begin{aligned} \int_{[n,+\infty[} \frac{1}{(t+1)^\alpha}\, dt &= \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{[n-1,+\infty[} \frac{1}{(t+1)^\alpha}\, dt = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

3 Fonctions sommables à valeurs réelles ou complexes

K désigne le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes ; les fonctions envisagées sont toujours continues par morceaux sur un intervalle I et à valeurs dans **K** ; l'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$ ou encore $\mathcal{CM}(I)$.

3.1 Fonction intégrable, sommable

Définitions 3.1 (Fonction sommable ou intégrable).

Soit $f \in \mathcal{CM}(I)$; f est dite *intégrable* (ou *sommable*) sur I si, et seulement si, $|f|$ est intégrable (ou sommable) sur I.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux et sommables sur I est noté $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$ ou encore $\mathcal{L}^1(I)$.

On utilisera au choix les termes intégrable ou sommable. Remarquons que la nouvelle notion de sommabilité est compatible avec la précédente.

Exemples 3.1. $t \mapsto t^{-2} \exp(it)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ tandis que $t \mapsto t^{-1} \exp(it)$ ne l'est pas.

Théorème 3.1 (Sommabilité par comparaison globale).

Soient $f \in \mathcal{CM}(I)$ et $\varphi \in \mathcal{CM}^+(I)$ telles que $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ pour tout $x \in I$; alors la sommabilité de φ sur I implique celle de f sur I.

Preuve. Le théorème de comparaison globale pour les fonctions positives montre la sommabilité de $|f|$. cqfd

Théorème 3.2 (Sommabilité par combinaison linéaire).
Soient f et $g \in \mathcal{CM}(I)$, λ et $\mu \in \mathbf{K}$; alors, si f et g sont sommables sur I, $\lambda f + \mu g$ est sommable sur I ; $\mathcal{L}^1(I)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

PREUVE. Puisque $|f|$ et $|g|$ sont sommables sur I, $|\lambda||f| + |\mu||g|$ est sommable sur I ; l'inégalité $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda||f| + |\mu||g|$ assure la sommabilité de $\lambda f + \mu g$ sur I.

La fonction nulle étant sommable sur I, $\mathcal{L}^1(I)$ est un $\mathbf{K}$-sous espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I)$. cqfd

Théorème 3.3 (Sommabilité sur $[a,b[$ par comparaison locale).
Soient f et $g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbf{K})$;

(*i*) *si $f \underset{b}{=} \mathrm{O}(g)$ et si g est sommable sur $[a,b[$, alors f est sommable sur $[a,b[$;*

(*ii*) *si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f est sommable sur $[a,b[$ si, et seulement si, g est sommable sur $[a,b[$.*

PREUVE.

(*i*) $f \underset{b}{=} \mathrm{O}(g) \iff |f| \underset{b}{=} \mathrm{O}(|g|)$; on retrouve le cas des fonctions positives ;

(*ii*) $f \underset{b}{\sim} g \implies |f| \underset{b}{\sim} |g|$; on retrouve le cas des fonctions positives.

cqfd

Théorème 3.4 (Sommabilité par intersection).
Soient $f \in \mathcal{CM}(I)$ et $c \in I$; alors, f est sommable sur I si, et seulement si, f est sommable sur $I \cap \,]-\infty, c]$ et sur $I \cap [c, +\infty[$.

PREUVE. Déjà vu pour les fonctions positives, donc pour $|f|$. cqfd

3.2 Intégrale d'une fonction intégrable (ou sommable)

3.2.1 Cas des fonctions à valeurs réelles

Définition 3.2 (Parties positive et négative d'une fonction).
Pour $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{R})$, on pose $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0)$; alors f^+ et f^- sont continues par morceaux et

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^- \tag{3.1}$$

Proposition 3.5 (Sommabilité des parties positive et négative).
Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{R})$; f est sommable sur I si, et seulement si, f^+ et f^- sont sommables sur I.

PREUVE. Les inégalités $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$ montrent que f^+ et f^- sont sommables sur I dès que $|f|$ l'est.

L'égalité $f = f^+ - f^-$ montre que f est sommable sur I dès que f^+ et f^- le sont. cqfd

Définition 3.3 (Intégrale d'une fonction réelle sommable).
Pour $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbf{R})$, on pose

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- \tag{3.2}$$

3.2.2 Cas des fonctions complexes

Proposition 3.6 (Sommabilité des parties réelle et imaginaire).
Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{C})$; f est sommable sur I si, et seulement si, $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sont sommables sur I.

PREUVE. Les inégalités $0 \leqslant |\Re\mathrm{e}(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |\Im\mathrm{m}(f)| \leqslant |f|$ montrent que $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ sont sommables sur I dès que $|f|$ l'est.

L'inégalité $|f| \leqslant |\Re\mathrm{e}(f)| + |\Im\mathrm{m}(f)|$ montre que f est sommable sur I dès que $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$ le sont. cqfd

Définition 3.4 (Intégrale d'une fonction complexe sommable).
Pour $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbf{C})$, on pose

$$\int_I f = \int_I \Re\mathrm{e}(f) + i \int_I \Im\mathrm{m}(f) \tag{3.3}$$

Remarque. L'intégrale des fonctions sommables réelles ou complexes est compatible avec l'intégrale des fonctions sommables positives.

Proposition 3.7 (Conjugué d'une intégrale).
Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$; alors, f est sommable sur I si, et seulement si, $\overline{f}$ est sommable sur I, et, dans ce cas

$$\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f} \tag{3.4}$$

Preuve. Les égalité $\Re\mathrm{e}(\overline{f}) = \Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(\overline{f}) = -\Im\mathrm{m}(f)$ montrent l'équivalence et la formule annoncées. cqfd

3.2.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction sommable

Théorème 3.8 (Intégrale et suite croissante de segments).
Soient $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et $(S_n)_n$ une suite de segments croissante vers I ; alors

$$\int_I f = \lim_n \int_{S_n} f \tag{3.5}$$

Preuve. La formule est vraie pour les fonctions sommables et positives, donc vraie pour f^+ et f^-, et donc la formule est vraie pour les fonctions sommables à valeurs réelles.

Puisque la formule est vraie pour les fonctions sommables réelles, elle est vraie pour $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$, et donc la formule est vraie pour les fonctions sommables à valeurs complexes. cqfd

Proposition 3.9 (Module d'une intégrale).

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{L}^1(I), \ \Big|\int_I f\Big| \leqslant \int_I |f|}$$

Preuve. Soit $(S_n)_n$ une suite de segments croissante vers I ; alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \Big|\int_{S_n} f\Big| \leqslant \int_{S_n} |f|$$

Un passage à la limite sur n (les limites existent) donne le résultat

$$\lim_n \Big|\int_{S_n} f\Big| = \Big|\int_I f\Big| \leqslant \int_{S_n} |f| = \int_I |f|$$

cqfd

Proposition 3.10 (Intégrale sur un segment).
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbf{K})$; alors f est sommable sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$, et les quatre intégrales sont toutes égales à $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, l'intégrale habituelle.

Preuve. La propriété est vraie pour les fonctions positives, donc pour $|f|$, et aussi pour f^+ et f^-, donc pour les fonctions sommables réelles, puis pour $\Re\mathrm{e}(f)$ et $\Im\mathrm{m}(f)$, donc pour les fonctions sommables complexes. cqfd

Proposition 3.11 (Intégrale d'une restriction).
Soient $f \in \mathcal{L}^1(I)$, $c \in I$, $I^g = I \cap \,]-\infty, c]$ *et* $I^d = I \cap [c, +\infty[$ *; alors*

$$\int_I f = \int_{I^g} f + \int_{I^d} f \tag{3.6}$$

Si J *est un sous-intervalle de* I, f *est sommable sur* J *et*

$$\int_J f = \int_I \chi_J f$$

Preuve. La formule a été démontrée pour les fonctions sommables positives, donc pour les parties positive et négative de fonctions sommables réelles ; cette formule est donc vraie pour les parties réelle et imaginaire de fonctions sommables complexes, donc vraie aussi pour les fonctions sommables complexes ;

Soit $(S_n)_n$ une suite de segments croissante vers J ; l'inégalité $\int_{S_n} |f| \leqslant \int_I |f|$ montre que f est sommable sur J. En passant à la limite sur n dans $\int_{S_n} f = \int_{S_n} \chi_J f$, on obtient l'égalité annoncée. cqfd

Théorème 3.12 (Linéarité de l'intégrale).
Soient f *et* $g \in \mathcal{L}^1(I)$, λ *et* $\mu \in \mathbf{K}$ *; alors*

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g \tag{3.7}$$

Preuve. $\lambda f + \mu g$ est sommable sur I ; pour $(S_n)_n$ suite de segments croissante vers I, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \int_{S_n} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{S_n} f + \mu \int_{S_n} g$$

Un passage à la limite sur n donne le résultat. cqfd

> $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$

3.2.4 Positivité de l'intégrale

Théorème 3.13 (Croissance de l'intégrale).
Soient f *et* $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbf{R})$ *; alors* $\forall t \in I, \; f(t) \leqslant g(t) \implies \int_I f \leqslant \int_I g$

Preuve. $g - f$ est une fonction sommable et à valeurs positives ; son intégrale est un nombre réel positif et la linéarité permet de conclure. cqfd

Lemme 3.14. *Soit* $f \in \mathcal{CM}^+(I)$ *; si* f *est sommable sur* I*, s'il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $f(x_0) > 0$ *et si* f *est continue en* x_0*, alors* $\int_I f > 0$.

Preuve. Si K_0 est un segment de I non réduit à un point qui contient x_0, alors $\int_{K_0} f > 0$, et $\int_I f = \sup_K \int_K f \geqslant \int_{K_0} f > 0$. cqfd

Théorème 3.15 (Fonction continue, positive et d'intégrale nulle).
Soit f *une fonction* continue, positive *et sommable sur* I *; alors,*

$$\int_I f = 0 \iff f = 0 \tag{3.8}$$

Preuve. Si f n'est pas la fonction nulle, le lemme précédent montre $\int_I f > 0$. La réciproque est évidente. cqfd

3.2.5 Notation $\int_a^b f$

Retrouvons la notation habituelle de l'intégrale : $\int_a^b f$ grâce à la :

Définition 3.5 (Extension de la notation $\int_a^b f$).

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{]a,b[} f & \text{si } -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty \\ -\int_{]b,a[} f & \text{si } -\infty \leqslant b < a \leqslant +\infty \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

Ainsi étendue, $f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$ où I est un intervalle d'extrémités a et b, et la relation de Chasles est vraie

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{L}^1(I),\ \forall (a,b,c) \in I^3,\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Attention ! La positivité a besoin que les bornes de l'intervalle d'intégration soient dans le « bon sens ».

3.3 Outils d'intégration

3.3.1 Intégration par parties

On évitera d'intégrer par parties sur l'intervalle I ; on intégrera par parties sur un segment d'une suite croissante vers I, et on passera à la limite.

3.3.2 Changement de variable

Théorème 3.16 (Changement de variable).
Soit φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre les intervalles J d'extrémités α et β et $I = \varphi(J)$ d'extrémités a et b ; alors

$$f \text{ est sommable sur } I \iff (f \circ \varphi)\varphi' \text{ est sommable sur } J$$

Dans ce cas

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u}$$

Preuve. Étudions le cas d'un intervalle semi-ouvert $J = [\alpha, \beta[$ et d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de J sur $\varphi(J) = I = [a, b[$, $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \lim_{t\uparrow\beta} \varphi(t)$. Notons $(S_n)_n = ([\alpha, \beta_n])_n$ une suite de segments croissante vers $[\alpha, \beta[$; alors, la suite de segments $\big(\varphi(S_n)\big)_n = ([\varphi(\alpha), \varphi(\beta_n)])_n = ([a, b_n])_n$ est une suite de segments croissante vers $[a, b[$ et

$$\int_\alpha^{\beta_n} |f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^{\beta_n} |f\big(\varphi(u)\big)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_n)} |f(t)|\,\mathrm{d}t \tag{3.9}$$

ce qui montre que $\lim_n \int_\alpha^{\beta_n} |f\big(\varphi(u)\big)|\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ existe si, et seulement si, $\lim_n \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_n)} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, ce qui donne l'équivalence demandée. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u &= \lim_n \int_\alpha^{\beta_n} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_n \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.10}$$

Les autres cas s'étudient de manière analogue. cqfd

Exemples 3.2.

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\frac{\sqrt{2}}{u}\,u\,\mathrm{d}u \qquad (t = u^2/2,\ dt = u\,\mathrm{d}u,\ \mathcal{C}^\infty\text{-difféo de }]0,+\infty[\text{ sur }]0,+\infty[) \\
&= \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad (\text{parité de } u \mapsto e^{-u^2/2} \text{ sur } \mathbf{R}) \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^{n-1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = W_{2n-2}$ (Wallis, le retour) à l'aide du changement de variable $t = \tan u$, $\mathrm{d}t = (1+\tan^2 u)\,\mathrm{d}u$), $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$.

Vous pouvez ajouter vos exemples.

4 Sommabilité et intégrale impropre

4.1 Sommabilité sur $[a, b[$ et accroissement d'une primitive

Théorème 4.1. *Soit f une fonction réelle ou complexe, continue par morceaux sur $[a, b[$;*

(i) *si f est sommable sur $[a, b[$, alors $\lim_b \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe ; dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f = \lim_{x \uparrow b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

(ii) *la réciproque est* FAUSSE*, en général, pour les fonctions réelles ou complexes, mais elle est vraie pour les fonctions positives.*

Preuve.

(i) Cas réel

$$\begin{aligned}
f \text{ sommable sur } [a, b[&\iff f^+ \text{ et } f^- \text{ sont sommables sur } [a, b[\\
&\iff \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f^+ \text{ et } \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f^- \text{ existent} \\
&\boxed{\implies} \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f^+ - \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f^- = \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f \text{ existe}
\end{aligned}$$

Cas complexe

$$\begin{aligned}
f \text{ sommable sur } [a, b[&\iff \Re\mathrm{e}(f) \text{ et } \Im\mathrm{m}(f) \text{ sont sommables sur } [a, b[\\
&\boxed{\implies} \lim_{x\uparrow b}\int_a^x \Re\mathrm{e}(f) \text{ et } \lim_{x\uparrow b}\int_a^x \Im\mathrm{m}(f) \text{ existent} \\
&\iff \lim_{x\uparrow b}\int_a^x \Re\mathrm{e}(f) + i\lim_{x\uparrow b}\int_a^x \Im\mathrm{m}(f) = \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f \text{ existe}
\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'égalité $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_b \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, vraie pour les fonctions positives, est vraie pour les fonctions réelles et pour les fonctions complexes sommables.

(ii) Il suffit d'exhiber un contre-exemple ; nous allons nous y employer au paragraphe suivant.

cqfd

4.2 L'exemple : $\lim_{x\uparrow+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Proposition 4.2. $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ *n'est PAS sommable sur* $[0, +\infty[$

Preuve. $t \mapsto t^{-1}\sin t$ est continue sur $[0, +\infty[$ en prolongeant cette fonction par continuité par 1 en $t = 0$. La fonction $t \mapsto |t^{-1}\sin t| = t^{-1}|\sin t|$ est sommable sur $\mathbf{R}_+$ si, et seulement si, la série de terme général $w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^{-1}|\sin t|\,\mathrm{d}t$ est une série convergente. Or,

$$
\begin{aligned}
w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n\pi+u)|}{n\pi+u}\,\mathrm{d}u \qquad (t = n\pi+u, \mathrm{d}t = \mathrm{d}u)\\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi+u}\,\mathrm{d}u \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi+\pi} = \frac{2}{(n+1)\pi}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

ce qui montre la divergence de la série $\sum w_n$. cqfd

Proposition 4.3. $\lim_{x\uparrow+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *existe et vaut* $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Preuve. $g : t \mapsto t^{-2}(1-\cos t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, prolongement par continuité en $t = 0$ par $g(0) = 1/2$. L'inégalité $0 \leqslant t^{-2}(1-\cos t) \leqslant 2t^{-2}$ montre la sommabilité de g sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\uparrow+\infty}\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

Une intégration par parties ($u' = \sin t, u = 1-\cos t, v = t^{-1}, v' = -t^{-2}$) montre pour $0 < \varepsilon < x$

$$\int_\varepsilon^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} - \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

Or, $\varepsilon^{-1}(1-\cos\varepsilon) \underset{\varepsilon=0}{\sim} \varepsilon/2$ et les fonctions $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^x t^{-1}(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^x t^{-2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$ sont continues (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbf{R}$; ce qui entraîne

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

et donne le résultat en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$. cqfd

Remarque. Le symbole $\int_0^{+\infty} t^{-1}\sin t\,\mathrm{d}t$ n'a pas de « sens », puisque la fonction $t \mapsto t^{-1}\sin t$ n'est pas sommable sur $[0, +\infty[$; par contre le symbole $\int_0^{+\infty} t^{-2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$ est « correct », puisque la fonction $t \mapsto t^{-2}(1-\cos t)$ est sommable sur $[0, +\infty[$.

4.3 Intégrale impropre

Définition 4.1 (Intégrale impropre sur $[a, b[$).

Si f est une fonction complexe continue par morceaux et non intégrable sur $[a, b[$, on dira que *f admet une intégrale impropre* sur $[a, b[$ si, et seulement si, $\lim_{x\uparrow b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (et est finie) dans $\mathbf{C}$; dans ce cas, on notera

$$\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\uparrow b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a une définition analogue pour les intervalles semi-ouverts à gauche :

Définition 4.2 (Intégrale impropre sur $]a, b]$).
Si f est une fonction complexe continue par morceaux et non intégrable sur $]a, b]$, on dira que *f admet une intégrale impropre* sur $]a, b]$ si, et seulement si, $\lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (et est finie) dans $\mathbf{C}$; dans ce cas, on notera

$$\int_{\to a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \downarrow a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 4.4. *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$; alors*

(i) Les fonctions $t \mapsto t^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \mapsto t^{-\alpha} \sin t$ et $t \mapsto t^{-\alpha} \cos t$ sont sommables sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$;

(ii) Les fonctions $t \mapsto t^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \mapsto t^{-\alpha} \sin t$ et $t \mapsto t^{-\alpha} \cos t$ admettent des intégrales impropres sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Preuve.

(*i*) La fonction $t \mapsto |t^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = t^{-\alpha}$ est sommable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si, $\alpha > 1$; donc aussi ses parties réelle et imaginaire ;

(*ii*) Une intégration par parties ($u' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, u = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $v = t^{-\alpha}, v' = -\alpha t^{-\alpha-1}$, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$) donne

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^\alpha} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{i}\alpha \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

Or, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,t^{-(\alpha+1)}$ est sommable sur $[1, +\infty[$ $(\alpha + 1 > 1)$,donc

$$\lim_{+\infty} \int_1^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,t^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,t^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

d'autre part, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,x^{-\alpha}| = x^{-\alpha} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(\alpha > 0)$. Ainsi

$$\lim_{+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{i}\alpha \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

En prenant les parties réelle et imaginaire des deux membres, on obtient

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\sin 1 + \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

cqfd

Remarque. La règle des équivalents est FAUSSE pour les intégrales impropres ; en effet les fonctions $f : x \mapsto t^{-\frac{1}{2}} \sin t$ et $g : x \mapsto f(t)\big(1 + f(t)\big)$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$; f admet une intégrale impropre sur $[1, +\infty[$, tandis que g n'en admet pas, car

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\cos 2t}{2t} + \frac{1}{2t}$$

5 Espaces de fonctions sommables

5.1 Norme de la convergence en moyenne

Théorème 5.1. *L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathcal{C}}(I, \mathbf{K})$ des fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$ continues et sommables sur I est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|$ est une norme sur cet espace ; c'est la* norme de la convergence en moyenne.

PREUVE. Il est facile de montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathcal{C}}(I, \mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$.

Puisque f est sommable, $\|f\|_1$ est un nombre réel positif et

(i) $\|f\|_1 = \int_I |f| = 0 \iff |f| = 0$ ($|f|$ est positive et *continue*) $\iff f = 0$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda f| = |\lambda| \int_I |f| = |\lambda|\, \|f\|_1$

(iii) $\|f + g\|_1 = \int_I |f + g| \leqslant \int_I (|f| + |g|) = \|f\|_1 + \|g\|_1$

cqfd

Extension à $\mathcal{L}^1(I)$

Imposons à toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ d'avoir la valeur 0 en tout point de discontinuité ; cette convention conserve l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale de f. Avec cette convention, $\int_I |f| = 0$ si, et seulement si, $|f(t)| = 0$ en tout point de continuité de f et donc en tout point de I. Ainsi $\| \ \|_1$ est encore une norme sur $\mathcal{L}^1(I)$.

5.2 Fonction de carré intégrable (ou sommable)

Définition 5.1 (Fonction de carré intégrable (ou sommable)).

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes et continue par morceaux sur I est dite *de carré intégrable (ou sommable)* sur I si, et seulement si, $|f|^2$ est sommable sur I.

L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$, continues par morceaux et de carré intégrable sur I est noté $\mathcal{L}^2(I, \mathbf{K})$ ou $\mathcal{L}^2(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbf{K}) \iff |f|^2 \in \mathcal{L}^1(I, \mathbf{R}_+) \iff \int_I |f|^2 < +\infty}$$

Exemples 5.1. $t \mapsto t^{-1} \in \mathcal{L}^2([1, +\infty[)$ et $\notin \mathcal{L}^1([1, +\infty[)$
$t \mapsto e^{-t} \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}_+) \cap \mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+)$
$t \mapsto t^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}^1(]0, 1])$ et $\notin \mathcal{L}^2(]0, 1])$

Théorème 5.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Si f et g sont deux fonctions de carré intégrable sur I, alors le produit fg est intégrable sur I et

$$\boxed{\forall (f, g) \in \mathcal{L}^2(I) \times \mathcal{L}^2(I),\ \left| \int_I fg \right| \leqslant \int_I |fg| \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}}$$

PREUVE. Commençons par le « truc » : pour tout a et b positifs, $0 \leqslant 2ab \leqslant a^2 + b^2$, car $0 \leqslant (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$; par conséquent

$$\forall t \in I,\ 0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$$

ce qui assure la sommabilité de fg sur I.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz sur un segment S de I donne

$$\int_S |fg| \leqslant \sqrt{\int_S |f|^2} \sqrt{\int_S |g|^2} \leqslant \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2} \tag{5.1}$$

En passant à la borne supérieure sur tous les segments de I, on obtient l'inégalité annoncée. cqfd

Corollaire. $\mathcal{L}^2(I, \mathbf{K})$ *et l'ensemble* $\mathcal{L}^2_{\mathcal{C}}(I, \mathbf{K})$ *des fonctions à valeurs dans* $\mathbf{K}$ *continues et de carré intégrable sont des* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels.*

PREUVE. $\mathcal{L}^2(I, \mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$: la fonction nulle est de carré intégrable sur I ; si f est de carré intégrable, λf l'est aussi ($|\lambda f|^2 = |\lambda|^2 |f|^2$) ; si f et g sont de carré intégrable, l'inégalité $|f + g|^2 \leqslant (|f| + |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2|fg|$ montre que $|f + g|^2$ est intégrable sur I car majorée par une combinaison linéaire de trois fonctions intégrables sur I.

$\mathcal{L}^2_{\mathcal{C}}(I, \mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^2(I, \mathbf{K})$. cqfd

5.3 Norme de la convergence en moyenne quadratique

Si f et g sont des fonctions continues par morceaux, de carré intégrable sur I et à valeurs réelles (resp. complexes), fg (resp.$\overline{f}g$) est intégrable sur I, ce qui permet de poser

$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}^2(I,\mathbf{R}) \times \mathcal{L}^2(I,\mathbf{R}),\ \langle f \mid g \rangle = \int_I fg \tag{5.2}$$

$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}^2(I,\mathbf{C}) \times \mathcal{L}^2(I,\mathbf{C}),\ \langle f \mid g \rangle = \int_I \overline{f}g \tag{5.3}$$

Théorème 5.3 (Produit scalaire sur l'espace des fonctions de carré intégrable).
$\langle\ \mid\ \rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}^2_{\mathcal{C}}(I,\mathbf{K})$ des fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$ continues et de carré intégrable sur I.

Preuve. Linéarité à droite, symétrie (éventuellement hermitienne) et positivité sont évidentes ; $0 = \langle f \mid f \rangle = \int_I |f|^2$ implique $|f| = 0$ puisque f est continue. cqfd

Théorème 5.4 (Norme de la convergence en moyenne quadratique).
$f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle} = \sqrt{\int_I |f|^2}$ est une norme sur l'espace des fonctions continues et de carré intégrable sur I ; on l'appelle la norme de la convergence en moyenne quadratique *sur I*

Preuve. C'est la norme associée au produit scalaire $\langle\ \mid\ \rangle$. cqfd

Extension aux fonctions continues par morceaux

En utilisant toujours la même convention, on donne la valeur 0 en tout point de discontinuité de la fonction, $\langle\ \mid\ \rangle$ reste un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I)$, $0 = \langle f \mid f \rangle = \int_I |f|^2$ implique $|f(t)| = 0$ en tout point de continuité de f donc en tout point de I, et $\|\ \|_2$ reste une norme sur $\mathcal{L}^2(I)$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit encore pour f et g dans $\mathcal{L}^2(I)$

$$|\langle f \mid g \rangle| = \left| \int_I \overline{f}g \right| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}$$

Proposition 5.5 (Continuité de la norme $\|\ \|_2$ et du produit scalaire).
Si $(f_n)_n$ (resp. suiteg) est une suite de fonctions continues et de carré intégrable sur I qui converge vers une fonction f (resp. g) continue et de carré intégrable sur I pour la norme de la convergence en moyenne quadratique (en résumé et en clair $\|f - f_n\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0$ et $\|g - g_n\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0$), alors

(i) $\|f_n\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} \|f\|_2$;
(ii) $\langle f_n \mid g_n \rangle \underset{n}{\longrightarrow} \langle f \mid g \rangle$.

Preuve. L'inégalité triangulaire « inversée » montre $\big| \|f\|_2 - \|f_n\|_2 \big| \leqslant \|f - f_n\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0$
Utilisant la célèbre technique de l'apparition-compensation, on obtient

$$\begin{aligned}
\big|\langle f \mid g \rangle - \langle f_n \mid g_n \rangle\big| &= \big|\langle f \mid g \rangle - \langle f_n \mid g \rangle + \langle f_n \mid g \rangle - \langle f_n \mid g_n \rangle\big| && (5.4)\\
&= \big|\langle f - f_n \mid g \rangle + \langle f_n \mid g - g_n \rangle\big| && (5.5)\\
&\leqslant \big|\langle f - f_n \mid g \rangle\big| + \big|\langle f_n \mid g - g_n \rangle\big| && (5.6)\\
&\leqslant \|f - f_n\|_2 \|g\|_2 + \|f_n\|_2 \|g - g_n\|_2 \underset{n}{\longrightarrow} 0 \times \|g\|_2 + \|f\|_2 \times 0 = 0 && (5.7)
\end{aligned}$$

cqfd

6 Les théorèmes de convergence

Donner des hypothèses simples et efficaces pour permettre la permutation des symboles $\lim_n$, $\lim_a$ et $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ avec $\int_I$, tel est le but de ce paragraphe.

Commençons par étudier un exemple. Soit

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} n^{-2}t & \text{si } t \in [0, n[\\ 2n^{-1} - n^{-2}t & \text{si } t \in [n, 2n[\\ 0 & \text{si } t \in [2n, +\infty[\end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ telle que $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, ce qui montre la convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+$ de la suite $(f_n)_n$ vers la fonction nulle. D'autre part, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout n. Ainsi

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}_+} f_n = 1 \neq \int_{\mathbf{R}_+} \lim_n f_n = \int_{\mathbf{R}_+} 0 = 0 \tag{6.1}$$

Quelle est la morale de l'histoire ? La convergence uniforme sur I d'une suite de fonctions n'autorise pas la permutation des symboles $\lim_n$ et $\int_I$, contrairement à ce qui était dans le cas de l'intégrale sur un segment.

6.1 Le théorème de convergence monotone de Beppo Levi

Théorème 6.1 (de convergence monotone, cas croissant).
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions réelles *et continues par morceaux telles que*

(*i*) *pour tout entier n, la fonction f_n est intégrable sur I ;*
(*ii*) *la suite $n \mapsto f_n$ est croissante,* i.e. $\forall (n,t) \in \mathbf{N} \times I,\ f_n(t) \leqslant f_{n+1}(t)$;
(*iii*) *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;*

alors, la fonction f est intégrable sur I si, et seulement si la suite $\left(\int_I f_n\right)_n$ est majorée et, dans ce cas,

$$\int_I f = \int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n = \sup_n \int_I f_n \tag{6.2}$$

Preuve *(hors programme)*. La croissance de la suite $(f_n)_n$ donne les inégalités $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant f$, et par intégration $\int_I f_n \leqslant \int_I f_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant \int_I f$. La suite $\left(\int_I f_n\right)_n$ est croissante et majorée et

$$\lim_n \int_I f_n = \sup_n \int_I f_n \leqslant \int_I f \tag{6.3}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Donnons une preuve avec l'hypothèse supplémentaire : la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers f. En utilisant, si besoin est, la suite $(f_n - f_0)_n$, on peut toujours se ramener à une suite $(f_n)_n$ de fonctions à valeurs réelles positives.

Pour tout segment S de I, on a $\int_S f_n \leqslant \int_I f_n \leqslant \sup_n \int_I f_n$; la convergence uniforme sur S de $(f_n)_n$ vers f montre que $\lim_n \int_S f_n = \int_S f$ $(\leqslant \sup_n \int_I f_n)$. Ainsi

$$\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur } I, \text{ et } \sup_S \int_S f = \int_I f \leqslant \sup_n \int_I f_n$$

L'équivalence est démontrée et l'égalité demandée aussi. cqfd

Théorème 6.2 (de convergence monotone, cas décroissant).
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions réelles *et continues par morceaux telles que*

(*i*) *pour tout entier n, la fonction f_n est intégrable sur I ;*
(*ii*) *la suite $n \mapsto f_n$ est décroissante,* i.e. $\forall (n,t) \in \mathbf{N} \times I,\ f_n(t) \geqslant f_{n+1}(t)$;

(*iii*) *la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* f *continue par morceaux ;*

alors, la fonction f *est intégrable sur* I *si, et seulement si la suite* $\left(\int_I f_n\right)_n$ *est minorée et, dans ce cas,*

$$\int_I f = \int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n = \inf_n \int_I f_n \tag{6.4}$$

Preuve. On applique le cas précédent à la suite de fonctions $(-f_n)_n$. cqfd

Exemple 6.1. $\lim_n \int_0^{+\infty} (\tanh nt)\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1.$
En effet

(*i*) $\forall (n,t) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}_+,\ 0 \leqslant (\tanh nt)\ \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ ce qui montre que $t \mapsto (\tanh nt)\ \mathrm{e}^{-t} \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{C}}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$;

(*ii*) tanh est une fonction croissante sur $\mathbf{R}$, donc $\forall (n,t) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}_+,\ \tanh nt \leqslant \tanh(n+1)t$ et la suite $(f_n : t \mapsto (\tanh nt)\ \mathrm{e}^{-t})_n$ est une suite croissante ;

(*iii*) $\forall t > 0,\ (\tanh nt)\ \mathrm{e}^{-t} \underset{n}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$ et $\tanh 0\ \mathrm{e}^0 = 0$ montre que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ vers la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ \chi_{]0,+\infty[}(t)$ qui est sommable sur $\mathbf{R}_+$.

6.2 Application à l'intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 6.3 (Cas d'une série de fonctions à valeurs réelles positives).
Si $\sum u_n$ *est une série de fonctions à valeurs réelles positives* ($\forall t \in I,\ u_n(t) \geqslant 0$) *telle que*

(*i*) *pour tout entier* n*, les fonctions* u_n *sont sommables sur* I *;*

(*ii*) *la série* $\sum u_n$ *converge simplement sur* I *vers* $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$*, fonction continue par morceaux ;*

alors, la somme $S = \sum u_n$ *de la série est sommable sur* I *si, et seulement si, la série des intégrales* $\sum \int_I u_n$ *est convergente, et, dans ce cas,*

$$\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n \tag{6.5}$$

Preuve. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$; alors, pour tout n, S_n est sommable sur I (combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions sommables), la suite $\big(S_n(t)\big)_n$ est croissante (la série est à termes positifs), et la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur I vers S fonction continue par morceaux.

Le théorème de convergence monotone montre que S est sommable sur I si, et seulement si, la suite $\left(\int_I S_n\right)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_I u_k\right)_n$ est une suite majorée, *i.e.* si, et seulement si, la série $\sum \int_I u_n$ est une série convergente (une série à termes positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est une suite majorée) ; dans ce cas, on a

$$\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_n \int_I S_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_I u_k = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n \tag{6.6}$$

cqfd

Exemple 6.2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \int_{t=0}^{+\infty} (1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t$ est divergente, car

(*i*) pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n : t \mapsto (1+t^2)^{-n}$ est sommable sur $]0,+\infty[$: u_1 est sommable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $t \in\ ]0,+\infty[$, $0 < u_n(t) \leqslant u_1(t)$;

(*ii*) la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1+t^2)^{-n} = t^{-2}$: on pose $q = (1+t^2)^{-1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q(1-q)^{-1}$.

Puisque S n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$, la série est divergente.

Théorème 6.4 (Cas d'une série de fonctions à valeurs réelles ou complexes). *Si $\sum u_n$ est une série de fonctions à valeurs réelles ou complexes telle que*

(*i*) *pour tout entier n, les fonctions u_n sont sommables sur I ;*

(*ii*) *la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, fonction continue par morceaux ;*

(*iii*) *la série des intégrales $\sum \int_I |u_n|$ est convergente (attention au module !) ;*

alors,

(*i*) *la somme $S = \sum u_n$ est sommable sur I et* $\displaystyle\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$;

(*ii*) $\displaystyle\|S\|_1 = \int_I \Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\Big|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_I \big|u_n(t)\big|\,\mathrm{d}t$

Preuve *(hors programme).* Donnons une preuve avec l'hypothèse supplémentaire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Soient $\varepsilon > 0$ et K un segment de I ; puisque la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur le segment K, il existe un entier N dépendant de ε et K tel que $\|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n\|_{\infty,K} < \varepsilon/|K|$ où $|K|$ désigne la longueur du segment K ; alors

$$\int_K |S| = \int_K \Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big| \leqslant \int_K \Big|\sum_{n=0}^{N} u_n\Big| + \int_K \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n\Big| \tag{6.7}$$

$$\leqslant \int_K \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \int_K \Big\|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n\Big\|_{\infty,K} \tag{6.8}$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} \int_K |u_n| + \varepsilon \leqslant \sum_{n=0}^{N} \int_I |u_n| + \varepsilon \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n| + \varepsilon \tag{6.9}$$

L'inégalité ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que, pour tout segment K de I, $\int_K |S| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n|$. Ainsi S est sommable sur I et

$$\sup_K \int_K |S| = \int_I |S| = \int_I \Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_I |u_n| \tag{6.10}$$

Appliquons les inégalités précédentes à la fonction (sommable) $S - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$:

$$\Big|\int_I S - \sum_{k=0}^{n} \int_I u_k\Big| = \Big|\int_I \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\Big| \leqslant \int_I \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_I |u_k| \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{6.11}$$

ce qui montre que $\int_I \sum_n u_n = \sum_n \int_I u_n$. cqfd

Remarque. La convergence de la série $\sum_n \int_I |u_n|$ est indispensable, la convergence de la série $\sum_n \int_I u_n$ ne suffit pas à permettre l'intégration terme à terme.

Exemples 6.3. $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

Développons la fonction cos en série ; de $\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n}/(2n)!$, on tire $\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-t}\, t^n/(2n)!$. On a

(*i*) pour tout entier n, la fonction $u_n : t \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-t}\, t^n/(2n)!$ est sommable sur $[0, +\infty[$, car $\mathrm{e}^{-t}\, t^n = \mathrm{O}\big(\mathrm{e}^{-t/2}\big)$ quand $t \to +\infty$;

(*ii*) $\int_{t=0}^{+\infty} \big|u_n(t)\big|\,\mathrm{d}t = 1/(2n)! \int_{t=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^n\,\mathrm{d}t = n!/(2n)!$ et la série $\sum \int_{t=0}^{+\infty} \big|u_n(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Le théorème d'intégration terme à terme est vérifié et donne la formule demandée.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}\frac{(-1)^{n-1}}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$
Posons $u_n(t)=(-1)^{n-1}(1+t^2)^{-n}$; l'exemple 6.2 montre que les fonctions u_n sont sommables sur $\mathbf{R}$ et que la série $\sum\int_{\mathbf{R}}|u_n|$ est divergente. Il faut revenir aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant $\sum_{k=1}^{n} q^k=(q-q^{n+1})(1-q)^{-1}$ pour $q=-(1+t^2)^{-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbf{R}}\frac{(-1)^{k-1}}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t=-\int_{\mathbf{R}}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{-1}{1+t^2}\Big)^k\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t+(-1)^{n+1}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{(2+t^2)(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite de la seconde intégrale :

(i) pour tout $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $(2+t^2)^{-1}(1+t^2)^{-n}\underset{n}{\longrightarrow}0$;
(ii) pour tout entier $n\geqslant 1$ et réel $t\in\mathbf{R}$, $0<(2+t^2)^{-1}(1+t^2)^{-n}\leqslant(2+t^2)^{-1}$ et $t\mapsto(2+t^2)^{-1}$ est une fonction sommable sur $\mathbf{R}$ (inégalité de domination) ;

ce qui montre que $\lim_n\int_{\mathbf{R}}(-1)^{n+1}(2+t^2)^{-1}(1+t^2)^{-n}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}2^{-1}\chi_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}(t)\,\mathrm{d}t=0$.

6.3 Le théorème de convergence dominée d'Henri Lebesgue

Théorème 6.5 (de convergence dominée).
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs réelles ou complexes telle que

(i) *la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;*
(ii) *il existe une fonction φ à valeurs réelles positives et* sommable *sur I telle que :*

$$\forall(n,t)\in\mathbf{N}\times I,\ |f_n(t)|\leqslant\varphi(t)\qquad\textit{(hypothèse de domination)}$$

alors la fonction f est sommable sur I et $\displaystyle\int_I f=\int_I\lim_n f_n=\lim_n\int_I f_n$

Preuve *(hors programme).* Nous allons faire l'hypothèse (supplémentaire) que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

En passant à la limite sur n dans l'inégalité $\forall(n,t)\in\mathbf{N}\times I$, $|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$, on obtient que pour tout $t\in I$, $|f(t)|\leqslant\varphi(t)$, ce qui montre la sommabilité de la fonction f sur I puisque φ est sommable sur I.

Donnons-nous $\varepsilon>0$; l'intégrabilité de φ sur I montre l'existence d'un segment K tel que $0\leqslant\int_{I\setminus K}\varphi\leqslant\varepsilon$; le segment K étant fixé, on peut alors trouver un rang N à partir duquel on a l'inégalité $\|f-f_n\|_{\infty,K}\leqslant\varepsilon/|K|$. Ainsi

$$\begin{aligned}\Big|\int_I f-\int_I f_n\Big| &\leqslant \Big|\int_I f-\int_K f\Big| + \Big|\int_K f-\int_K f_n\Big| + \Big|\int_K f_n-\int_I f_n\Big|\\ &= \Big|\int_{I\setminus K} f\Big| + \Big|\int_K (f-f_n)\Big| + \Big|\int_{I\setminus K} f_n\Big|\\ &\leqslant \int_{I\setminus K}|f| + \int_K|f-f_n| + \int_{I\setminus K}|f_n|\\ &\leqslant \int_{I\setminus K}\varphi + \int_K\|f-f_n\|_{\infty,K} + \int_{I\setminus K}\varphi \leqslant 3\varepsilon\end{aligned}$$

ce qui montre que $\int_I f_n\underset{n}{\longrightarrow}\int_I f$. cqfd

Exemple 6.4. $\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(1+\frac{t^2}{2n}\Big)^{-n} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t$
Pour $n \geqslant 1$, la formule du binôme de Newton donne

$$\Big(1+\frac{t^2}{2n}\Big)^n = 1 + \mathsf{C}_n^1\frac{t^2}{2n} + \cdots \geqslant 1 + \mathsf{C}_n^1\frac{t^2}{2n} = 1 + n\frac{t^2}{2n} = 1 + \frac{t^2}{2}$$

ce qui montre que $\forall (n,t) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{R},\ 0 \leqslant f_n(t) = \big(1+t^2/(2n)\big)^{-n} \leqslant (1+t^2/2)^{-1} = \varphi(t)$; or φ est sommable sur $\mathbf{R}$ et l'hypothèse de domination est vérifiée.

Puisque $-n\ln\big(1+t^2/(2n)\big) \underset{n}{\sim} -n\big(t^2/(2n)\big) = -t^2/2$, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f_n(t) = \exp\Big(-n\ln\big(1+\frac{t^2}{2n}\big)\Big) \underset{n}{\longrightarrow} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big) = f(t) \tag{6.12}$$

ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ qui est continue, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbf{R}$.

Le calcul de $\int_{\mathbf{R}}\big(1+t^2/(2n)\big)^{-n}\,\mathrm{d}t$ permet de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}}\Big(1+\frac{t^2}{2n}\Big)^{-n}\mathrm{d}t &= 2\int_0^{+\infty}\Big(1+\frac{t^2}{2n}\Big)^{-n}\mathrm{d}t && \text{parité de l'intégrande}\\
&= 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+u^2)^n}\sqrt{2n}\,\mathrm{d}u && u=\frac{t}{\sqrt{2n}},\ \mathrm{d}t=\sqrt{2n}\,\mathrm{d}u\\
&= 2\sqrt{2n}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\tan^2 v)^{n-1}}\,\mathrm{d}v && u=\tan v,\ \mathrm{d}u=(1+\tan^2 v)\,\mathrm{d}v\\
&= 2\sqrt{2n}\int_0^{\pi/2}(\cos v)^{2n-2}\,\mathrm{d}v = 2\sqrt{2n}\,W_{2n-2} && 1+\tan^2 v=\frac{1}{\cos^2 v}
\end{aligned}$$

C'est le retour de l'intégrale de Wallis dont on connaît un équivalent $W_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\pi/(2n)}$; on peut donc passer à la limite sur n : $\lim_n 2\sqrt{2n}\,W_{2n-2} = \sqrt{2\pi}$, ce qui donne :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}}$$

7 Intégrale dépendant d'un paramètre

Le but de cette section est d'étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions du type $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, par exemple

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-i2\pi xt}\,\mathrm{d}t$$

On note I l'intervalle d'intégration et t la variable d'intégration ; A désigne l'intervalle dans lequel varie le paramètre x.

7.1 Continuité

Théorème 7.1 (Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre).
Si f est une application de $A \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

(*i*) *f est continue sur $A \times I$ rapport au couple (x,t) ;*
(*ii*) *il existe une application φ à valeurs réelles positives et* sommable *sur I telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors, pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est sommable sur I et l'application

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

Preuve *(hors programme).* L'hypothèse de domination permet d'appliquer le critère de comparaison (globale) et montre la sommabilité de $t \mapsto f(x,t)$.

Montrons la continuité de g en un point *quelconque* $a \in A$; pour cela, utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité, à savoir : g est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de A de limite a, $\big(g(x_n)\big)_n$ est une suite convergente de limite $g(a)$.

Soient $(x_n)_n$ une suite de A de limite a et h_n la fonction $t \mapsto f(x_n,t)$. Pour tout entier n, on a $|h_n(t)| = |f(x_n,t)| \leqslant \varphi(t)$ et, vu la continuité de la fonction f, $\lim_n h_n(t) = \lim_n f(x_n,t) = f(a,t)$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites et

$$\lim_n g(x_n) = \lim_n \int_I h_n = \int_I \lim h_n = \int_I f(a,t)\,\mathrm{d}t = g(a) \tag{7.1}$$

La fonction g est donc continue en tout point a de A. cqfd

Exemple 7.1. La fonction $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbf{R}$.
$(x,t) \mapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}$ est continue sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2$, $|f(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2/2} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbf{R}$, l'hypothèse de domination est satisfaite.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A

La continuité est une propriété locale : dire que g est continue sur A, c'est dire que g est continue en tout point de A, ou encore, c'est montrer la continuité de g sur tous les segments de A ; d'où le théorème

Théorème 7.2 (Continuité d'une intégrale par rapport au paramètre, domination sur tout segment).
Si f est une application de $A \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

(i) la fonction f est continue sur $A \times I$ rapport au couple (x,t) ;
(ii) pour tout segment S de A, il existe une application φ_S à valeurs réelles positives et sommable *sur I telle que*

$$\forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_S(t) \quad \textit{(hypothèse de domination sur le segment } S\textit{)}$$

alors, pour $\forall x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est sommable sur I et l'application

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur A.

Exemple 7.2. Continuité de la fonction Γ.

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$$

La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t} = \exp\big((x-1)\ln t\big)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Soit $0 < a < b < +\infty$; $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in]0,1]$, $t^{x-1} = \exp\big((x-1)\ln t\big) \leqslant t^{a-1}$ ($\ln t \leqslant 0$ et la fonction $x \mapsto t^{x-1}$ est monotone décroissante) et $\forall t \in]1,+\infty[$, $t^{x-1} = \exp\big((x-1)\ln t\big) \leqslant t^{b-1}$ ($\ln t > 0$ et la fonction $x \mapsto t^{x-1}$ est monotone croissante). Ainsi

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[,\ 0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1},t^{b-1}) \leqslant t^{a-1}+t^{b-1}$$
$$\text{et } 0 < t^{x-1}e^{-t} \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t} = \varphi_{[a,b]}(t)$$

L'application $\varphi_{[a,b]}$ est sommable sur $]0,+\infty[$. Ainsi Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

La continuité de la fonction Γ en $x=1$ montre que $\lim_{x\to 0}\Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$; de l'identité $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$, on tire

$$\Gamma(x) \underset{x\downarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\downarrow 0}\Gamma(x) = +\infty$$

7.2 Dérivation sous le signe $\int_I$, formule de Leibniz

Théorème 7.3 (Dérivation sous le signe $\int_I$).

Si f est une application de $A\times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

(*i*) *les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $A\times I$ rapport au couple (x,t) ;*

(*ii*) *il existe deux applications φ_0 et φ_1 à valeurs réelles positives et* sommables *sur I telles que*

$$\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_0(t) \ \text{et}\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t) \quad \textit{(hypothèses de domination)}$$

alors l'application $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A,\ g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{7.2}$$

Preuve *(hors programme).* Le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre montre la continuité de g sur A, grâce à la domination $|f(x,t)| \leqslant \varphi_0(t)$ avec $\varphi_0 \in \mathcal{L}^1(I)$.

Nous allons montrer la dérivabilité de g en un point (quelconque) a de A en déterminant la limite du taux d'accroissement de g en a, soit

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_I \frac{f(a+h,t)-f(a,t)}{h}\,\mathrm{d}t \tag{7.3}$$

Pour cela, posons

$$\mathcal{F}(h,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\big(f(a+h,t)-f(a,t)\big) & \text{si } h \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t) & \text{si } h = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

$\mathcal{F}$ est une fonction continue par rapport au couple (h,t) sur $V\times I$ où V est un voisinage de $h=0$; l'inégalité de Taylor assure l'inégalité $\forall (h,t) \in V\times I,\ |\mathcal{F}(h,t)| \leqslant \varphi_1(t)$ (hypothèse de domination). C'est pourquoi $h \mapsto \int_I \mathcal{F}(h,t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue en $h=0$, soit

$$g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_I \mathcal{F}(h,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \mathcal{F}(0,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{d}t \tag{7.5}$$

Le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre montre la continuité de la fonction dérivée $g' : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$. cqfd

Exemple 7.3. La fonction $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, e^{-2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-2\pi^2 x^2}}$$

Les fonctions $(x,t) \mapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}$ et $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{i}2\pi t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}$ sont continues sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}$, on a les majorations : $|f(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2/2} = \varphi_0(t)$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2\pi|t|\,\mathrm{e}^{-t^2/2} = \varphi_1(t)$; les fonctions φ_0 et φ_1 sont intégrables sur $\mathbf{R}$ (les hypothèses de domination sont remplies). La fonction $\hat{f}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$(\hat{f})'(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} -\mathrm{i}2\pi t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}\ \mathrm{d}t$$

Intégrons par parties ($u'_t = -t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}, u = \mathrm{e}^{-t^2/2},\ v = e^{-\mathrm{i}2\pi xt}, v'_t = -\mathrm{i}2\pi x e^{-i2\pi xt}$) sur le segment $[-n,n]$ avec $n \in \mathbf{N}$ qui tend vers $+\infty$:

$$(\hat{f})'(x) = \mathrm{i}2\pi \int_{\mathbf{R}} -t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,e^{-\mathrm{i}2\pi xt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}2\pi \lim_n \int_{-n}^{n} -t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,e^{-\mathrm{i}2\pi xt}\,\mathrm{d}t \tag{7.6}$$

$$= \mathrm{i}2\pi \lim_n \left\{ \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}\Big|_{t=-n}^{t=n} + \mathrm{i}2\pi x \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}\ \mathrm{d}t \right\} \tag{7.7}$$

$$= 0 + (\mathrm{i}2\pi)^2 x \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi xt}\ \mathrm{d}t = -4\pi^2 x \hat{f}(x) \tag{7.8}$$

car $\lim_{t\to\infty}|e^{-t^2/2}e^{-i2\pi xt}| = \lim_{t\to\infty} e^{-t^2/2} = 0$. La fonction $\hat{f}$ vérifie l'équation différentielle $y' = -4\pi^2 x\, y$ dont les $\mathbf{R}$-solutions sont $y(x) = K\,\mathrm{e}^{-2\pi^2 x^2}$. Or, $\hat{f}(0) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ ce qui détermine la constante d'intégration K.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A

La dérivabilité est une propriété locale : dire que g est dérivable sur A, c'est dire que g est dérivable en tout point de A, ou encore, c'est montrer la dérivabilité de g sur tous les segments de A ; de même montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, c'est montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les segments de A. D'où le théorème

Théorème 7.4 (Dérivation sous le signe $\int_I$, domination sur tout segment).
Si f est une application de $A \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

(*i*) *les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $A \times I$ rapport au couple (x,t) ;*
(*ii*) *pour tout segment S de A, il existe deux applications $\varphi_{0,S}$ et $\varphi_{1,S}$ à valeurs réelles positives et* sommables *sur I telles que*

$$\forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_{0,S}(t)\ \textit{et}\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{1,S}(t)$$

(hypothèses de domination sur tout segment)

alors l'application $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A,\ g'(x) = \frac{d}{dx}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \tag{7.9}$$

Exemple 7.4.

La fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

$$\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Les fonctions $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \mapsto (\ln t)t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ sont continues sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Soient $0 < a < b < +\infty$; pour tout $x \in [a,b]$ et $t \in]0,+\infty[$, on a les inégalités $0 < f(x,t) \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t} = \varphi_{0,[a,b]}(t)$ et $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| = |\ln t| f(x,t) \leqslant |\ln t|(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t} = \varphi_{1,[a,b]}(t)$, et les applications $\varphi_{0,[a,b]}$ et $\varphi_{1,[a,b]}$ sont sommables sur $]0,+\infty[$.

Une récurrence sur k permet d'étendre ces théorèmes aux applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur A.

Théorème 7.5 (Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).
Si f est une application de $A \times I$ à valeurs réelles ou complexes telle que

(i) *pour tout entier $r \in [\![0,k]\!]$, la fonction $\frac{\partial^r f}{\partial x^r}$ est continue sur $A \times I$ rapport au couple (x,t) ;*

(ii) *pour tout entier $r \in [\![0,k]\!]$ et pour tout segment S de A, il existe des applications $\varphi_{r,S}$ à valeurs réelles positives et* sommables *sur I telles que*

$$\forall (x,t) \in S \times I,\ \left|\frac{\partial^r f}{\partial x^r}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{r,S}(t) \quad \textit{(hypothèses de domination sur tout segment)}$$

alors l'application $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et

$$\forall x \in A,\ g^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 7.5.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{La fonction } \Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\\ \forall k \in \mathbf{N},\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}}$$

Pour tout $r \in \mathbf{N}$, la fonction $\frac{\partial^r f}{\partial x^r} : (x,t) \mapsto (\ln t)^r\, t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par rapport au couple (x,t).

Soient $0 < a < b < +\infty$; $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial^r f}{\partial x^r}(x,t)\right| = |\ln t|^r f(x,t) \leqslant |\ln t|^r(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t} = \varphi_{r,[a,b]}(t)$, les applications $\varphi_{r,[a,b]}$ sont sommables sur $]0,+\infty[$.

Remarquons que $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$; la fonction Γ est une fonction (strictement) convexe.

Chapitre 11

Série entière

Sommaire

1 Introduction

Comme toujours, $\mathbf{K}$ désigne l'un des corps $\mathbf{R}$ ou C.

Définitions 1.1 (Série entière).
Une *série entière* de variable réelle (resp. complexe), est une série de fonctions $\sum u_n$ particulière : les fonctions u_n sont des monômes $a_n z^n$ où a_n est un nombre complexe et z un nombre réel (resp. complexe) ; on la note $\sum a_n z^n$. En cas de convergence, la somme est notée :

$$S : z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

L'*addition* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.
Le *produit* de la série entière $\sum a_n z^n$ par le scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$, est la série entière $\sum \lambda a_n z^n$.
Le *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_p z^p$ et $\sum b_q z^q$ est la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \tag{1.2}$$

Pour ces opérations, l'ensemble des séries entières est une $\mathbf{K}$-algèbre commutative.

Exemples 1.1.
La série géométrique

$$\forall z \in \mathbf{C},\ |z| < 1, \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \tag{1.3}$$

La fonction exponentielle et ses copines

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad \exp z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.4}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{1.5}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{ch} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{1.6}$$

La fonction logarithme (réel)

$$\forall x \in \,]-1,1], \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \tag{1.7}$$

La fonction puissance

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z},\ \forall x \in \,]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!} \tag{1.8}$$

Remarque. Jusqu'au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, toutes les fonctions étaient considérées comme des sommes de séries entières : elles étaient « développables en série entière », même quand ces développements n'étaient pas convergents au sens de la Spé !

Ce n'est qu'avec les travaux des mathématiciens du XIX$^{\text{e}}$ siècle, que la notion de fonction est apparue, ainsi que les notions de continuité, de dérivabilité...

2 Rayon de convergence d'une série entière

2.1 Généralités

Lemme 2.1 (d'Abel).
Si la suite $(|a_n|r_0^n)_n$ *est majorée, alors la série* $\sum a_n z^n$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbf{C}$ *tel que* $|z| < r_0$.

PREUVE. Soit $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n|r_0^n \leqslant M$; alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n|r_0^n\Big(\frac{|z|}{r_0}\Big)^n \leqslant M\Big(\frac{|z|}{r_0}\Big)^n$$

ce qui montre que $a_n z^n = \mathrm{O}\big((|z|/r_0)^n\big)$. $\sum\big(|z|/r_0\big)^n$ est une série géométrique, de raison positive et plus petite que 1 ($|z| < r_0$), donc convergente ; le théorème de comparaison montre l'absolue convergence de $\sum a_n z^n$. cqfd

Remarque. La convergence de la série $\sum a_n r_0^n$ implique la convergence vers 0 de la *suite* $(|a_n|r_0^n)_n$ et entraîne le caractère borné de cette suite.

Théorème 2.2 (Définition du rayon de convergence).
Si $\sum a_n z^n$ *est une série entière, l'ensemble* $I = \{r \in \mathbf{R}_+ \ /\ \text{la série } \sum |a_n| r^n \text{ est convergente}\}$ *est un intervalle de* $\mathbf{R}_+$ *contenant 0.*

La borne supérieure de I *dans* $\overline{\mathbf{R}_+} = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *est appelée* rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *et notée* R_a *ou* R*, s'il n'y a pas d'ambiguïté.*

PREUVE. Il est clair que $0 \in I$ et, pour tout $r \in I$, le segment $[0, r] \subset I$ grâce au théorème de comparaison :

$$0 \leqslant r' \leqslant r \implies \forall n \in \mathbf{N},\ |a_n|{r'}^n \leqslant |a_n| r^n$$

la série $\sum |a_n|{r'}^n$ converge puisque la série $\sum |a_n| r^n$ est convergente. cqfd

Exemples 2.1.
Si $a_n = n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I = \{0\}$.
Si $a_n = 1/n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I = \mathbf{R}_+$.
Si $a_n = \rho^{-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I = [0, \rho[$.
Si $a_n = (n+1)^{-2}\rho^{-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I = [0, \rho]$.
Ceci montre que l'intervalle I peut être des quatre types suivants :$\{0\}$, $\mathbf{R}_+$, $[0, \rho[$ ou $[0, \rho]$.

Théorème 2.3 (Caractérisation du rayon de convergence).
Le rayon de convergence R_a *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est caractérisé par*

$|z| < R_a \implies$ *la* série $\sum a_n z^n$ *converge absolument ;*

$|z| > R_a \implies$ *la* suite $(|a_n||z|^n)_n$ *n'est pas majorée et la série* $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement.*

PREUVE. Soit $|z_0| > R_a$; si la suite $(a_n z_0^n)_n$ est majorée, le lemme d'Abel montre que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Ainsi I contient $[0, |z_0|[$ et $R_a = \sup I \geqslant |z_0|$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite. cqfd

Remarque. Chère lectrice, cher lecteur, vous êtes conviés à faire la plus grande attention à la qualité stricte ou large des inégalités.

Définition 2.1 (Disque, intervalle ouverts de convergence).
Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe (resp. réelle) de rayon de convergence $R_a > 0$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon R_a est appelé *disque ouvert de convergence* et l'intervalle ouvert $]-R_a, R_a[$ est appelé *intervalle ouvert de convergence.*

La série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point z de son disque (resp. intervalle) ouvert de convergence. En tout point z extérieur, *i.e.* en tout point z tel que $|z| > R_a$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas majorée et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. On ne peut rien dire, en général, de la nature de la série $\sum a_n z^n$ en tout point z de module R_a ; c'est pourquoi le cercle de centre 0 et de rayon R_a est appelé *cercle d'incertitude.*

2.2 Calcul du rayon de convergence

Théorème 2.4 (Détermination du rayon de convergence).
Le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'un des intervalles suivants :

$$\begin{aligned} E &= \{r \in \mathbf{R}_+ \ / \ \textit{la suite } (a_n r^n)_n \ \textit{est majorée}\} \\ F &= \{r \in \mathbf{R}_+ \ / \ \textit{la suite } (a_n r^n)_n \ \textit{admet 0 pour limite}\} \\ G &= \{r \in \mathbf{R}_+ \ / \ \textit{la série } \textstyle\sum a_n r^n \ \textit{converge}\} \\ I &= \{r \in \mathbf{R}_+ \ / \ \textit{la série } \textstyle\sum |a_n| r^n \ \textit{converge}\} \end{aligned}$$

Preuve. Les inclusions $I \subset G \subset F \subset E$ sont évidentes et donnent les inégalités :

$$\sup I \leqslant \sup G \leqslant \sup F \leqslant \sup E$$

Reste à montrer l'inégalité $\sup E \leqslant \sup I$; pour cela montrons l'implication

$$r < \sup E \implies r \in I \qquad \text{soit } [0, \sup E[\subset I$$

Si $r < \sup E$, la suite $(|a_n| r^n)_n$ est une suite majorée et le lemme d'Abel montre que $r \in I$. Ainsi, $[0, \sup E[\subset I$ et $\sup E = \sup[0, \sup E[\leqslant \sup I$. cqfd

Remarques.
Si la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors $R_a \geqslant |z_0|$.
Si la série $\sum a_n z_0^n$ est divergente, alors $R_a \leqslant |z_0|$.

Théorème 2.5 (Rayon et critère de D'Alembert).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ; s'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ *avec* $\lim_n |a_{n+1}/a_n| \ell$, *alors $R_a = 1/\ell$*

$$\boxed{\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ \textit{existe et vaut } \ell \qquad \implies \qquad R_a = \frac{1}{\ell}}$$

Preuve. La règle de D'Alembert donne pour n assez grand :

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \xrightarrow[n]{} \ell |z|$$

Si $\ell|z| < 1$, *i.e.* si $|z| < 1/\ell$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si $\ell|z| > 1$, *i.e.* si $|z| > 1/\ell$, la suite $(|a_n z^n|)_n$ diverge vers $+\infty$ et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Le théorème de caractérisation du rayon de convergence montre que $R_a = 1/\ell$. cqfd

Remarque. Le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n z^n$ existe toujours, ce qui n'est pas le cas de la limite de la suite $\left(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right)_n$; la série entière définie par $a_{2p} = 2$ et $a_{2p+1} = 1$ en est un exemple : $R_a = 1$ et la suite $\left(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right)_n$ n'a pas de limite.

Théorème 2.6 (Comparaison de rayons de convergence).
Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors :

(*i*) $\big(\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > N \implies |a_n| \leqslant |b_n|\big) \implies R_a \geqslant R_b$;
(*ii*) $\big(\exists \alpha \in \mathbf{R},\ a_n = \mathrm{O}(n^\alpha |b_n|)\big) \implies R_a \geqslant R_b$;
(*iii*) $\big(\exists \alpha \in \mathbf{R},\ |a_n| \underset{n}{\sim} n^\alpha |b_n|\big) \implies R_a = R_b$;
(*iv*) *en particulier :* $|a_n| \underset{n}{\sim} |b_n| \implies R_a = R_b$.

Preuve. Comment démontrer que $R_a \geqslant R_b$? Le principe en est le suivant : on prend $r < R_b$ (remarquer l'inégalité *stricte* pour en déduire la convergence absolue de la série $\sum b_n z^n$), on montre la convergence de $\sum |a_n| r^n$ et on en déduit que $r \leqslant R_a$. La démonstration consiste donc à montrer l'inclusion $[0, R_b[\subset [0, R_a]$.

(i) C'est un cas particulier de (ii) ; mais le scribe, dans sa grande bonté, peut en faire une démonstration directe : si $r < R_b$, la série $\sum |b_n| r^n$ est convergente ; les inégalités $|a_n| r^n \leqslant |b_n| r^n$ pour $n > N$ montrent la convergence de la série $\sum |a_n| r^n$, et donc $r \leqslant R_a$; ainsi $[0, R_b[\subset [0, R_a]$ et $R_b \leqslant R_a$.

(ii) Si $0 \leqslant r < r' < R_b$, la série $\sum |b_n| r'^n$ est convergente et la suite $\big(|b_n| r'^n\big)_n$, qui admet 0 pour limite, est majorée.

Les conditions $r < r'$ et $\big(|b_n| r'^n\big)_n$ majorée impliquent $|b_n| r^n = |b_n r'^n \big(r/r'\big)^n| = \mathrm{O}\big((r/r')^n\big)$.

D'autre part, $a_n = \mathrm{O}(n^\alpha |b_n|)$ et $|b_n| r^n = \mathrm{O}\big((r/r')^n\big)$ impliquent $|a_n| r^n = \mathrm{O}\big(n^\alpha (r/r')^n\big)$; or, la série $\sum n^\alpha \big(r/r'\big)^n$ est une série convergente : la règle de D'Alembert donne $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\big(r/r'\big) \underset{n}{\longrightarrow} r/r' < 1$. Ceci montre la convergence de la série $\sum |a_n| r^n$ et...

(iii) $\exists \alpha \in \mathbf{R},\ |a_n| \underset{n}{\sim} n^\alpha |b_n|$ implique $\exists \alpha \in \mathbf{R},\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n > N \implies \frac{1}{2} n^\alpha |b_n| \leqslant |a_n| \leqslant 2 n^\alpha |b_n|$; ainsi, $|a_n| = \mathrm{O}(n^\alpha |b_n|)$ et $|b_n| = \mathrm{O}\big(n^{-\alpha} |a_n|\big)$, ce qui donne l'égalité annoncée.

(iv) la question précédente pour $\alpha = 0$ donne le résultat.

cqfd

2.3 Opérations algébriques et rayon de convergence

Théorème 2.7. *Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b, alors :*

(i) *pour tout $\lambda \in \mathbf{K}^*$, le rayon de convergence de $\sum \lambda\, a_n z^n$ est R_a et :*

$$\forall z \in \mathbf{K},\ |z| < R_a \implies \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\, a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

(ii) *le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R_s = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R_s \geqslant R_a = R_b$ sinon, et :*

$$\forall z \in \mathbf{K},\ |z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{2.2}$$

(iii) *le rayon de convergence R_c de la série entière produit $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$, et :*

$$\forall z \in \mathbf{K},\ |z| < \min(R_a, R_b) \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q\right) \tag{2.3}$$

Preuve.

(i) Si $\lambda \in \mathbf{K}^*$, la suite $(|a_n| r^n)_n$ est majorée si, et seulement si, la suite $(|\lambda a_n| r^n)_n$ l'est ; ainsi le rayon vaut R_a ;

(ii) si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum |a_n| r^n$ et $\sum |b_n| r^n$ sont convergentes ; la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est (absolument) convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ et $R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Si les rayons R_a et R_b sont distincts, par exemple $R_a < R_b$, prenons $r \in]R_a, R_b[$; les inégalités $|a_n + b_n| r^n \geqslant |a_n| r^n - |b_n| r^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrent que la suite $\big(|a_n + b_n| r^n\big)_n$ n'est pas majorée, et donc $R_s \leqslant r$. Ainsi $]R_a, R_b[\subset [R_s, +\infty[$ et $R_s \leqslant R_a = \min(R_a, R_b)$. L'égalité annoncée est donc démontrée.

(*iii*) Si $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes ; la série produit (de Cauchy) l'est aussi et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}\Big) = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p\Big) \times \Big(\sum_{q=0}^{\infty} b_q z^q\Big)$$

cqfd

Remarques.

Si $R_a = R_b$, on peut avoir $R_s > R_a$: il suffit de prendre $a_n = 1$ et $b_n = -1$ pour tout n ; dans ce cas $R_a = R_b = 1$ (les séries sont géométriques) et $R_s = +\infty$ (la série somme est la série nulle).

Si $R_a = R_b$ et si $a_n b_n = 0$ pour tout n (on dit alors que les séries entières sont *disjointes*), alors $R_s = R_a = R_b$. Raisonnons par l'absurde ; si $R_s > R_a = R_b$, prenons $r \in]R_a, R_s[$; dans ces conditions, la suite $\big(|a_n| r^n\big)_n$ n'est pas majorée, tandis que $\big(|a_n + b_n| r^n\big)_n$ l'est. Or, $|a_n| r^n \leqslant \big(|a_n| + |b_n|\big) r^n = |a_n + b_n| r^n$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, si les séries entières $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$ et $\sum a_{2p} z^{2p}$ ont le même rayon de convergence R, la série entière $\sum a_n z^n$ admet R pour rayon de convergence.

Théorème 2.8 (Puissance de série géométrique).

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N},\ \forall z \in \mathbf{C},\ |z| < 1 \implies \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}_{n+p}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}_{n+p}^{p} z^n = \sum_{n=p}^{\infty} \mathsf{C}_{n}^{p} z^{n-p}}$$

Preuve. Par récurrence sur p.

Pour $p = 0$, la série géométrique donne le résultat :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}_n^n z^n$$

On suppose la formule vraie au rang $p-1$. Pour $|z| < 1$, les séries sont absolument convergentes et le produit des séries donne :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{(1-z)^p} \times \frac{1}{1-z} = \Big(\sum_{k=0} \mathsf{C}_{k+p-1}^{k} z^k\Big) \times \Big(\sum_{q=0}^{\infty} z^q\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_{k+p-1}^{k}$. Or, $\mathsf{C}_{k+p-1}^{k} = \mathsf{C}_{k+p}^{k} - \mathsf{C}_{k-1+p}^{k-1}$ pour $k \geqslant 1$; ce qui donne, par destruction de termes, $c_n = \mathsf{C}_{n+p}^{n}$. cqfd

3 Propriétés de la somme d'une série entière

Dans cette section, on étudie les propriétés de la somme S de la série entière $\sum a_n z^n$ sur son disque ou son intervalle ouvert de convergence. On supposera donc que le rayon de convergence R_a est strictement positif et donc

$$S : z \in \{z \in \mathbf{C} \ / \ |z| < R_a\} \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ou

$$S : x \in]-R_a, R_a[\mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

3.1 Continuité de la somme

Théorème 3.1 (Convergence normale).
Une série entière converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé strictement inclus *dans le disque ouvert de convergence.*

Preuve. Soient R_a le rayon de convergence et $0 \leqslant r < R_a$; les inégalités

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in \mathbf{C},\ |z| \leqslant r \implies |a_n z^n| = |a_n||z|^n \leqslant |a_n| r^n = \alpha_n \tag{3.1}$$

montrent que la série entière converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r, puisque α_n est le terme général d'une série numérique convergente ($r < R_a$) indépendante de z. cqfd

Remarques.
Dans le cas réel, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout *segment* de l'intervalle ouvert de convergence $]-R_a, R_a[$.
En général, il n'y a ni convergence normale, ni convergence uniforme sur le disque ouvert ou l'intervalle ouvert de convergence. Donnons un contre-exemple : la série géométrique $\sum z^n$ a un rayon $R = 1$, $S(z) = (1-z)^{-1}$ pour $|z| < 1$ et

$$\big|R_n(z)\big| = \big|S(z) - S_n(z)\big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} z^k\Big| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \implies \sup_{|z|<1}\big|R_n(z)\big| = +\infty$$

Théorème 3.2 (Continuité de la somme).
La somme d'une série entière définit une fonction continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $\mathbf{K}$; la série entière converge uniformément sur tout disque fermé (strictement) inclus dans le disque ouvert de convergence ; sa somme est donc continue sur tous les disques fermés du disque ouvert de convergence, donc continue sur ce disque ouvert de convergence (la continuité est une propriété locale). cqfd

Remarques.
Dans le cas réel, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R_a, R_a[$.
Si la série $\sum |a_n| R_a^n$ est convergente, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R_a, puisque $|z| \leqslant R_a$ implique $|a_n z^n| \leqslant |a_n| R_a^n$. La somme S est donc définie et continue sur le disque fermé $\{|z| \leqslant R_a\}$.

Théorème 3.3 (Développement limité de la somme).
La somme d'une série entière admet un développement limité à tout ordre au voisinage de $z = 0$.

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \mathrm{o}(z^n) \qquad \textit{au voisinage de } z = 0 \tag{3.2}$$

Preuve. Pour tout $|z| < R_a$, on peut écrire :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + z^n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + z^n \varepsilon(z)$$

Or, $\varepsilon(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p} z^p$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$. La fonction ε définit une fonction continue sur le disque ouvert de convergence et $\lim_0 \varepsilon(z) = \varepsilon(0) = 0$. cqfd

Remarque. On comprend maintenant le qualificatif de « limité » que l'on adjoint au terme de « développement ». On comprend aussi pourquoi la connaissance des développements limités des fonctions classiques permet de retrouver leur développement en série entière.

3.2 Intégration terme à terme

Dans ce paragraphe, les séries entières possèdent une variable *réelle*.

Théorème 3.4 (Intégration terme à terme de la somme).

(*i*) *Les séries entières* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum a_n x^n/(n+1)$ *ont le même rayon de convergence* R_a *;*

(*ii*) *pour tout* segment $[\alpha, \beta]$ *de* $]-R_a, R_a[$*, on a :*

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} \tag{3.3}$$

(*iii*) *pour tout* $x \in]-R_a, R_a[$*, on a :*

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{3.4}$$

Preuve.

(*i*) $a_n/(n+1) \underset{n}{\sim} n^{-1} a_n$, ce qui montre l'égalité des rayons ;

(*ii*) la série $\sum a_n t^n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout *segment* de l'intervalle ouvert de convergence $]-R_a, R_a[$; le théorème d'intégration terme à terme des séries fait le reste ;

(*iii*) ceci est un cas particulier de (*ii*).

cqfd

Exemples 3.1. Pour $x \in]-1, 1[$, on peut écrire :
$\ln(1+x) = \int_0^x (1+t)^{-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$$

et $\arctan(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Remarque. La première formule est encore vraie pour $x = 1$, la seconde est vraie pour $x = \pm 1$; ce ne sont pas des conséquences directes du théorème précédent.

N'oublions pas le théorème d'intégration terme à terme des séries sur un intervalle !

3.3 Dérivation terme à terme

Dans ce paragraphe, les variables des séries entières considérées sont *réelles*.

Théorème 3.5 (Dérivation terme à terme de la somme).
Si $\sum a_n x^n$ *est une série entière de rayon de convergence* R_a*, alors*

(*i*) *la série dérivée première* $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{q \geqslant 0} (q+1) a_{q+1} x^q$ *a le même rayon de convergence* R_a *; la somme* $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-R_a, R_a[$ *et*

$$\forall x \in]-R_a, R_a[, \ S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{q=0} (q+1) a_{q+1} x^q \tag{3.5}$$

(ii) la série dérivée p^e $\sum_{n\geqslant p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$ *a le même rayon de convergence* R_a *; la somme* S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R_a, R_a[$ *et*

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in\,]-R_a, R_a[,$$
$$S^{(p)}(x) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{q=0} \frac{(q+p)!}{q!} a_{q+p} x^q \tag{3.6}$$

(iii) en particulier :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \tag{3.7}$$

Preuve.
(i) La série $\sum a_n x^n$ est obtenue par intégration (terme à terme) de la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$; ces deux séries ont donc le même rayon de convergence et

$$\forall x \in\,]-R_a, R_a[,\ S(x) - S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}\, dt = \int_0^x S_1(t)\, dt$$

Ainsi S est une primitive sur $]-R_a, R_a[$ de la fonction continue S_1 ; S est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $S' = S_1$;

(ii) par récurrence sur p en utilisant (i) ;

(iii) on fait $x = 0$ dans la formule (ii).

cqfd

Remarque. Les séries entières se dérivent et s'intègrent terme à terme sur l'intervalle *ouvert* de convergence $]-R_a, R_a[$. Une dérivation ou une intégration jusqu'au *bord* de l'intervalle ne se justifie qu'en reprenant les théorèmes *généraux* de dérivation ou d'intégration des séries de fonctions.

Exemple 3.2. De l'identité $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pour $x \in\,]-1, 1[$, on tire :

$$\forall x \in\,]-1, 1[,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{q=0}^{\infty} (q+1) x^q$$

et pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$\forall x \in\,]-1, 1[,\ \frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) x^{n-p} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(q+p)!}{q!} x^q$$

Théorème 3.6 (Unicité des coefficients d'une série entière).
Deux séries entières qui coïncident sur un voisinage de 0 *son identiques.*

$$\left(\exists r > 0,\ \forall x \in\,]-r, r[,\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \implies \left(\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = b_n\right) \tag{3.8}$$

Preuve. Soient $R = \min(R_a, R_b)$ et f la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$$

f est (identiquement) nulle sur $]-r, r[$, toutes ses dérivées aussi ; en conséquence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n - b_n = f^{(n)}(0)/n! = 0$, soit $a_n = b_n$. cqfd

3.4 Sommation de séries entières

3.4.1 $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme.

Quel est le rayon de convergence ? Si P est de degré d, $P(n) \underset{n}{\sim} \alpha_d n^d$ et $R = 1$.
La somme est connue dans le cas où $P(n) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$: pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n = x^k \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = x^k \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Dans le cas général, il suffit de décomposer le polynôme P (supposé de degré d) dans la base $\{1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)\cdots(X-d+1)\}$ de $\mathbf{K}_d[X]$ adaptée à la situation.
Si $P = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{d} \alpha_k X(X-1)\cdots(X-d+1)$, alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k x^k \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

3.4.2 $\sum P(n)x^n/n!$ où P est un polynôme

Quel est le rayon de convergence ? Si P est de degré d, $P(n)/n! \underset{n}{\sim} \alpha_d n^d/n!$ et $R = +\infty$.
Si $P(n) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, alors, pour $n \geqslant k$, $P(n)x^n/n! = x^n/(n-k)!$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} x^n = x^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} = x^k \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} x^q = x^k \exp x$$

Dans le cas général, il suffit de décomposer le polynôme P (supposé de degré d) dans la base $\{1, X, X(X-1), \cdots, X(X-1)\cdots(X-d+1)\}$ de $\mathbf{K}_d[X]$ adaptée à la situation.
Si $P = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{d} \alpha_k X(X-1)\cdots(X-d+1)$, alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} x^n = (\exp x) \sum_{k=0}^{d} \alpha_k x^k$$

4 Fonction développable en série entière

Dans cette section les variables des séries entières considérées sont *réelles*.

4.1 Un peu de vocabulaire

Définitions 4.1 (Fonction développable en série entière).
Une fonction f est dite *développable en série entière sur l'intervalle ouvert* $]-r, r[$ si, et seulement si, il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

i.e. si, et seulement si, f est la somme d'une série entière sur l'intervalle $]-r, r[$. La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée *le développement en série entière* de la fonction f sur l'intervalle $]-r, r[$.
La fonction f est dite *développable en série entière au voisinage de* $x = 0$ si, et seulement si, il existe un nombre $r_0 > 0$ tel que f soit développable en série entière sur l'intervalle $]-r_0, r_0[$.
La fonction f est dite *développable en série entière au voisinage de* $x = x_0$ si, et seulement si, la fonction $g : u \mapsto f(x_0 + u)$ est développable en série entière au voisinage de $u = 0$. Dans ce cas :

$$\exists r_{x_0} > 0, \ \exists (a_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \ \forall x \in]x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.1}$$

Exemples 4.1.

La fonction $x \mapsto (1-x)^{-1}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ car

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

La fonction $x \mapsto (1-x)^{-1}$ est développable en série entière au voisinage de $x_0 \neq 1$; posons $u = x - x_0$, alors :

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(x_0+u)} = \frac{1}{1-x_0}\frac{1}{1-\dfrac{u}{1-x_0}} = \frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u}{1-x_0}\right)^n \quad \text{si } \left|\frac{u}{1-x_0}\right| < 1$$

Ainsi en posant $r_{x_0} = |1-x_0|$, on obtient :

$$\forall x \in]x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^n$$

4.2 Analyse de la situation

Si f est une fonction développable en série entière sur l'intervalle ouvert $]-r,r[$, f est la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-r,r[$; *nécessairement* f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et le coefficient a_n est égal à $f^{(n)}(0)/n!$. Le développement en série entière de f est donc donné par la série $\sum f^{(n)}(0)x^n/n!$, ce qui motive la

Définition 4.2 (Série de Taylor d'une fonction).

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $x = 0$, la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est appelée *série de Taylor de la fonction f en $x = 0$*

Il est légitime de se poser deux questions :
– la série de Taylor de f en $x = 0$ a-t-elle un rayon de convergence non nul ?
– si oui, la fonction f est-elle égale à sa série de Taylor sur un voisinage de $x = 0$?

Le paragraphe suivant propose deux exemples qui donnent une réponse négative à ces deux questions.

4.3 Exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ non développables en série entière

4.3.1 Exemple d'une série de Taylor de rayon de convergence nul

Considérons la fonction f définis par la somme de la série de fonctions :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{4.2}$$

Cette série converge normalement sur $\mathbf{R}$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2x}| = \mathrm{e}^{-n} = (\mathrm{e}^{-1})^n$ et la série géométrique $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est convergente. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout entier naturel k,

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right| = \left|(\mathrm{i}n^2)^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2x}\,\mathrm{e}^{-n}\right| = n^{2k}\,\mathrm{e}^{-n} = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-n/2})$$

ce qui entraîne la convergence normale sur $\mathbf{R}$ de la série des dérivées k^{e} pour tout k.

Le calcul de $f^{(k)}(0)$ se fait en dérivant terme à terme la série, soit :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{i}n^2)^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n^2x}\,\mathrm{e}^{-n}\,\Big|_{x=0} = \mathrm{i}^k\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}\,\mathrm{e}^{-n} \tag{4.3}$$

ce qui donne la minoration :

$$\left|f^{(k)}(0)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}\,\mathrm{e}^{-n} \geqslant k^{2k}\,\mathrm{e}^{-k}$$

Étudions la nature de la série $\sum |f^{(k)}(0)| r^k/k!$ pour $r > 0$:

$$\frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} r^k \geqslant \frac{k^{2k}\,\mathrm{e}^{-k}}{k!} r^k = \beta_k$$

$$\text{et } \frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{2k}} \frac{1}{k+1}\ \mathrm{e}^{-1}\, r = \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{2k} (k+1)\,\mathrm{e}^{-1}\, r \underset{k}{\sim} \mathrm{e}^2\, k\ \mathrm{e}^{-1}\, r \underset{k}{\longrightarrow} +\infty$$

Le critère de D'Alembert montre la divergence de la série $\sum \beta_k$; par le théorème de comparaison, la série $\sum |f^{(k)}|(0) r^k/k!$ est aussi divergente pour tout $r > 0$; la série de Taylor de f a donc un rayon de convergence nul.

4.3.2 Exemple d'une fonction différente de sa série de Taylor

Considérons la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\Big(\dfrac{-1}{x}\Big) & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

La fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et, pour tout entier naturel k et tout réel $x \in]0, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = Q_k\big(1/x\big) \exp\big(-1/x\big)$ où Q_k est un polynôme unitaire de degré $2k$ (raisonner par récurrence) ; ainsi

$$f^{(k)}(x) \underset{x\downarrow 0}{\sim} x^{-2k} \exp\Big(\frac{-1}{x}\Big) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\downarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$$

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ (récurrence et théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^1$) et, pour tout entier k, $f^{(k)}(0) = 0$. La série de Taylor de f en $x = 0$ est la série nulle, sa somme est différente de f sur tout voisinage de 0.

4.4 Synthèse

Théorème 4.1 (Caractérisation des fonctions développables en série entière).
Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $x = 0$; f est développable en série entière si, et seulement si,

$$\exists r > 0,\ \forall x \in]-r, r[,\ \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{4.5}$$

Preuve. Ce n'est que l'application de la formule de Taylor avec reste intégral, améliorée par le changement de variable $t = xu$ (pour $x \neq 0$) :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

La fonction f est développable en série entière si, et seulement si, la série de Taylor de f converge vers f sur un intervalle $]-r, r[$, *i.e.* si, et seulement si, le reste intégral de la formule de Taylor tend vers 0 sur $]-r, r[$. cqfd

Théorème 4.2 (Condition suffisante de développement en série entière).
Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $x = 0$; alors :

$$\Big(\exists r > 0,\ \exists M > 0,\ \forall k \in \mathbf{N},\ \forall x \in \,]-r, r[,\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant M\Big) \implies \\ f \text{ est développable en série entière sur }]-r, r[\tag{4.6}$$

Preuve. C'est l'application de l'inégalité de Taylor ; pour tout $x \in \,]-r, r[$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \left|f^{(n+1)}(xu)\right|\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n M\,\mathrm{d}u = \frac{|x|^{n+1}}{n!} M \frac{1}{n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

cqfd

Proposition 4.3 (Développement en série entière et parité).
Si f est une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ $(r > 0)$, alors

$$\begin{aligned} f \text{ est une fonction paire} &\iff \forall p \in \mathbf{N},\ a_{2p+1} = 0 \\ f \text{ est une fonction impaire} &\iff \forall p \in \mathbf{N},\ a_{2p} = 0\end{aligned}$$

Preuve. Si f est paire, f' est impaire, et si f est impaire, f' est paire. Une récurrence montre que si f est une fonction paire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(2p+1)}$ est une fonction impaire, et donc, $a_{2p+1} = f^{(2p+1)}(0)/(2p+1)! = 0$. De même, si f est une fonction impaire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(2p)}$ est une fonction impaire, et donc, $a_{2p} = f^{(2p)}(0)/(2p)! = 0$.

Réciproquement, la somme d'une série entière qui ne comporte que des monômes pairs (resp. impairs) définit une fonction paire (resp. impaire). cqfd

4.5 Exemples de développement en série entière

4.5.1 Utilisation de la série de Taylor

La fonction exponentielle. On considère la fonction auxiliaire $\varphi(t) = \exp(zt)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$; $\varphi^{(k)}(t) = z^k \exp(zt)$ et la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\begin{aligned}\left|\exp z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| &= \left|\varphi(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right| \\ &= \left|\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} z^{n+1} \exp(zu)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \exp\big(\Re\mathrm{e}(z)u\big)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \exp\big(|\Re\mathrm{e}\, z|\big)\,\mathrm{d}u = \frac{|z|^{n+1}}{n!}\exp\big(|\Re\mathrm{e}\, z|\big)\frac{1}{n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

ce qui montre (une nouvelle fois) que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbf{C},\ \exp z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

La série du binôme. Pour $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, on pose $f(x) = (1+x)^\alpha = \exp\big(\alpha \ln(1+x)\big)$; la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ et

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. Utilisant la décroissance de $u \in [0,1] \mapsto \dfrac{1-u}{1+xu}$ pour $x > -1$ fixé, le reste intégral se majore à l'aide de :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^1 (1-u)^n (1+xu)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+xu}\right)^n (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^1 (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{4.7}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} &\Big|(1+x)^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!}\Big| \\ &\qquad = \Big|\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+xu)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}u\Big| \\ &\qquad \leqslant \big|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\big|\frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1+xu)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u = u_n \end{aligned} \tag{4.8}$$

Or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x| \underset{n}{\longrightarrow} |x|$, ce qui montre que u_n tend vers 0 pour tout $x \in \left]-1,1\right[$.

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n}$$

4.5.2 Utilisation de combinaison linéaire de développement en série

Développement en série entière de $\ln(1+x+x^2)$. Amie lectrice, ami lecteur, voici une astuce que l'on peut qualifier de *vaseuse* :

$$\forall x \neq 1,\ 1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(1+x+x^2) = -\ln(1-x) + \ln(1-x^3) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ en posant } a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } n \equiv 2 \pmod 3 \\ -\dfrac{2}{n} & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Développement en série entière de $\operatorname{ch} x \cos x$. Le but du jeu est de *linéariser* ; pour cela, on utilise les expressions complexes des fonctions trigonométriques :

$$\operatorname{ch} x \cos x = \cos ix \cos x = \frac{1}{2}\big(\cos(x+\mathrm{i}x) + \cos(x-\mathrm{i}x)\big) = \Re\mathrm{e}\big(\cos(1+\mathrm{i})x\big)$$

Or, $\cos(1+\mathrm{i})x = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ et $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\pi/4)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}(1+\mathrm{i})^{2n} = \Re\mathrm{e}\Big(\sqrt{2}\exp\big(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\big)\Big)^{2n} &= \Re\mathrm{e}\Big(2^n\exp\big(\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}\big)\Big) \\ &= 2^n\cos\Big(n\frac{\pi}{2}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2 \\ 2^{2p}(-1)^p & \text{si } n = 2p \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \operatorname{ch} x \cos x = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{2^{2p}}{(4p)!} x^{4p}$$

4.5.3 Utilisation d'une équation différentielle

La série du binôme (one more time). La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ vérifie l'équation différentielle :

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 \tag{4.9}$$

sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et vaut 1 pour $x = 0$. Recherchons les solutions de cette équation différentielle qui sont la somme d'une série entière.

D'abord la phase d'analyse ; soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; alors :

$$\forall x \in \,]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

et S est une $]-R, R[$-solution de (4.9) si, et seulement si, pour tout $x \in \,]-R, R[$:

$$\begin{aligned} 0 = S'(x) + xS'(x) - \alpha S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n\big) x^n \end{aligned}$$

L'unicité des coefficients du développement en série entière de la fonction nulle entraîne que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0, \quad \text{soit } a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$$

et, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = \frac{\alpha - n + 1}{n} \times \frac{\alpha - n + 2}{n-1} \times \cdots \times \frac{\alpha - 1}{2} \times \frac{\alpha}{1} a_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$$

Les séries entières solutions de (4.9) constituent une droite vectorielle dirigée par $S : x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n/n!$, série dont le rayon de convergence vaut 1 ($\big|a_{n+1}/a_n\big| = |\alpha - n|/n+1 \underset{n}{\longrightarrow} 1$).

Effectuons la synthèse ; f et S sont deux $]-1, 1[$-solutions de (4.9) qui coïncident en $x = 1$; les fonctions f et S sont égales sur $]-1, 1[$.

$$\boxed{\forall x \in \,]-1, 1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}$$

4.5.4 Cas des fractions rationnelles

Proposition 4.4 (Développement en série entière des fractions rationnelles). *Toute fraction rationnelle f, n'admettant pas 0 pour pôle, admet un développement en série entière au voisinage de 0. La série entière, dont f est la somme, a, pour rayon de convergence, le plus petit module des pôles de f dans $\mathbf{C}$,* i.e. *la distance de 0 au plus proche des pôles complexes.*

Preuve. Soient $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_p|$ les pôles complexes distincts de la fraction rationnelle f, ordonnés par module croissant. La décomposition de f sur $\mathbf{C}$ donne :

$$f = E(X) + \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(X - z_k)^j} \Big)$$

où $E \in \mathbf{C}[X]$ est la partie entière de f et $\alpha_{k,j} \in \mathbf{C}$. De

$$\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \forall |z|<1,\ \frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}_{n+p-1}^{p} z^n$$

on tire pour $|z|<|a|$:

$$\frac{1}{(z-a)^p} = \frac{1}{(-a)^p}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{a}\right)^p} = \frac{1}{(-a)^p}\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}_{n+p-1}^{p}\Big(\frac{z}{a}\Big)^n = (-1)^p \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{C}_{n+p-1}^{p} \frac{z^n}{a^{n+p}}$$

C'est ainsi que l'on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\forall |z|<|z_1|,\ f(z) &= E(z) + \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{m_k}(-1)^j \alpha_{k,j}\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{C}_{n+p-1}^{p}\frac{z^n}{z_k^{n+j}}\Big)\\ &= E(z) + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1}^{m_k}(-1)^j\alpha_{k,j}\mathsf{C}_{n+p-1}^{p}\frac{1}{z_k^{n+j}}\Big)\Big)z^n\end{aligned}$$

Appelons R le rayon de convergence de la série entière qui développe f. Si $R > |z_1|$ (z_1 est le pôle de plus petit module), f coïncide avec la somme S de cette série entière sur le disque $\{|z|<|z_1|\}$. Puisque z_1 appartient au disque de convergence de S, $\lim_{z_1} S(z)$ existe dans $\mathbf{C}$ et donc aussi $\lim_{z\to z_1, |z|<|z_1|} f(z)$, ce qui est en contradiction avec le fait que z_1 soit un pôle ; ainsi $R \leqslant |z_1|$. cqfd

Développement en série entière en $x=0$ de $f_\alpha : x \mapsto \arctan\Big(\frac{1+x}{1-x}\tan\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\Big)$ avec $\alpha \in]0,\pi[$

La fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et sa dérivée est une fraction rationnelle :

$$\forall x>-1,\ f'_\alpha(x) = \frac{\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} - \frac{1}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\Big) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1-x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} - \frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\Big)$$

que l'on développe en série entière pour $|x|<1$ (les pôles de la fraction sont les complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$) :

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{in\alpha}x^n - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-in\alpha}x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(\sin(n+1)\alpha\big)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)x^{n-1}$$

Par intégration terme à terme, en utilisant $f_\alpha(0)=\frac{\alpha}{2}$, on trouve

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_\alpha(x) = \arctan\Big(\frac{1+x}{1-x}\tan\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\Big) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n}x^n$$

Chapitre 12

Calcul différentiel en plusieurs variables

Sommaire

Dans ce chapitre, U désigne une partie ouverte de $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{f}$ une application définie sur U à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, $(f_1, \dots, f_n) = (f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les applications coordonnées de $\mathbf{f}$ relatives à la base naturelle de $\mathbf{R}^n$; $\mathbf{f}$ et les f_i sont, respectivement, des applications vectorielle et numériques définies sur U.

Quant aux normes sur les espaces $\mathbf{R}^p$ ou $\mathbf{R}^n$, rappelons qu'elles sont équivalentes (on peut utiliser une quelconque d'entre elles) ; $\| \ \|$ désigne une norme quelconque, $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont les trois normes classiques.

1 Limite, continuité

1.1 Rappel

Théorème 1.1 (Caractérisation de la continuité en un point).
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\mathbf{f}$ *est continue en un point* $\mathbf{a} \in U$ *;*
(*ii*) $\lim_{\mathbf{a}} \mathbf{f}$ *existe et, dans ce cas, cette limite est* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ *;*
(*iii*) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall \mathbf{x} \in U,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \implies \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ *;*
(*iv*) *l'application* $\mathbf{h} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})$ *admet une limite en* $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ *(cette limite, sous réserve d'existence, est toujours* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$*) ;*
(*v*) *pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$*,* f_i *admet une limite en* $\mathbf{a}$*.*

En pratique :
- utilisez les théorèmes généraux sur les limites et la continuité ;
- pour montrer la continuité en un point particulier $\mathbf{a}$, effectuez la translation $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ et étudier la limite en $\mathbf{h} = \mathbf{0}$;
- si $p = 2$, utilisez les coordonnées polaires.

Exemple 1.1. Considérons la fonction

$$f : (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{si } (x_1, x_2) \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = \mathbf{0} \end{cases}$$

les théorèmes généraux montrent la continuité de f sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Au point $(x_1, x_2) = \mathbf{0}$, utilisons les coordonnées polaires ; on pose :

$$x_1 = r\cos\theta \text{ et } x_2 = r\sin\theta$$

et on obtient :

$$\left|f(x_1, x_2) - f(\mathbf{0})\right| = \left|\frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r} - 0\right| = r|\cos\theta\sin\theta| = \frac{r}{2}|\sin 2\theta| \leqslant \frac{r}{2}$$

ce qui montre que $\left|f(x_1, x_2) - f(\mathbf{0})\right| \leqslant \frac{1}{2}\|(x_1, x_2)\|_2$ et assure la continuité de f en $\mathbf{0}$.

1.2 Limite suivant un vecteur

La situation Soient $\mathbf{a} \in U$ et $\mathbf{v}$ un vecteur de $\mathbf{R}^p$; puisque U est une partie ouverte de $\mathbf{R}^p$, il existe un nombre $r' > 0$ tel que $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r') \subset U$ et, en posant $r = r'/(2\|\mathbf{v}\|)$, on obtient :

$$\exists r > 0,\ \forall t \in [-r, r],\ \mathbf{a} + t\mathbf{v} \in \mathcal{B}_f(\mathbf{a}, r'/2) \subset \mathcal{B}(\mathbf{a}, r') \subset U$$
$$\text{soit : } \exists r > 0,\ \forall t \in [-r, r],\ \mathbf{a} + t\mathbf{v} \in U$$

Nous pouvons donc définir une fonction d'*une seule* variable réelle t par :

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{a},\mathbf{v}} : t \in [-r, r] \mapsto \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{a},\mathbf{v}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \in \mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

Définition 1.1 (Applications partielles).
Les applications $\varphi_{\mathbf{a},\varepsilon_j}$, $j \in [\![1,p]\!]$, où $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ estla base naturelle de $\mathbf{R}^p$, sont appelées *applications partielles* de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$.

$$\varphi_{\mathbf{a},\varepsilon_j} : t \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\varepsilon_j) = \mathbf{f}(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\dots,a_p)$$

Exemple 1.2. Reprenons l'exemple précédent ; si $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$, on obtient :

$$\varphi_{\mathbf{0},\mathbf{v}}(t) = \frac{v_1 t\, v_2 t}{\sqrt{v_1^2t^2+v_2^2t^2}} = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}|t|$$

Les deux applications partielles sont nulles :

$$\varphi_{\mathbf{0},\varepsilon_1}(t) = f(0+t,0) = 0 \text{ et } \varphi_{\mathbf{0},\varepsilon_2}(t) = f(0,0+t) = 0$$

Remarque. Attention de ne pas confondre les applications partielles et les applications composantes d'une fonction.

Définition 1.2 (Limite en un point suivant un vecteur).
On dit que $\mathbf{f}$ *admet une limite en* $\mathbf{a}$ *suivant* $\mathbf{v}$ si, et seulement si, l'application $\varphi_{\mathbf{a},\mathbf{v}}$ admet une limite en $\mathbf{0}$, *i.e.* si, et seulement si, $\lim_{t\to 0}\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ existe.
Dans ce cas, cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in\mathbf{a}+\mathbf{R}\mathbf{v}}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Remarque. La limite de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ suivant $\mathbf{v}$ est donc la limite de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ quand $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{a}$ en restant sur la droite passant par $\mathbf{a}$ et dirigée par $\mathbf{v}$.

Théorème 1.2 (Limite et limite suivant un vecteur).
Si $\mathbf{f}$ *admet* $\mathbf{b}$ *pour limite en* $\mathbf{a}$*, pour tout vecteur* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{f}$ *admet* $\mathbf{b}$ *pour limite en* $\mathbf{a}$ *suivant* $\mathbf{v}$*.*
La réciproque est fausse.

PREUVE. Le théorème de composition des limites donne la réponse.
La fonction f suivante, qui est continue sur $\mathbf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$, founit un contre-exemple en $\mathbf{0}$:

$$f : (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^4} & \text{si } (x_1,x_2)\neq\mathbf{0} \\ o & \text{si } (x_1,x_2)=\mathbf{0} \end{cases}$$

Si $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ avec $v_1\neq 0$, $f(\mathbf{0}+t\mathbf{v}) = \dfrac{tv_1(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4} = t\dfrac{v_1v_2^2}{v_1^2+t^2v_2^4} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$
Si $\mathbf{v}=(0,v_2)$ avec $v_2\neq 0$, $f(\mathbf{0}+t\mathbf{v})=0$.
Ceci montre que f admet 0 comme limite en $\mathbf{0}$ en suivant un vecteur (quelconque) $\mathbf{v}$ (non nul).
Or, en suivant la parabole $(\mathcal{P}) : t\mapsto(t^2,t)$ on obtient :

$$f(t^2,t) = \frac{t^2t^2}{t^4+t^4} = \frac{1}{2} \text{ et donc : } \lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \frac{1}{2} \neq f(\mathbf{0})$$

et donc, la fonction f n'est pas continue en $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. cqfd

Remarque. Ce théorème s'utilise pour montrer la *non-continuité* ou l'*inexistence de la limite* d'une application en un point.

2 Applications continûment différentiables

2.1 Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.1 (Dérivée suivant un vecteur).

On dit que la fonction $\mathbf{f}$ *admet en* $\mathbf{a} \in U$ *une dérivée suivant le vecteur* $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^p$ si la fonction $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{a},\mathbf{v}} : t \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ est dérivable en $t = 0$.

Dans ce cas, la dérivée de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ suivant $\mathbf{v}$ se note $\mathrm{D}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{f}(\mathbf{a})$ ou encore $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$. Retenons que :

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\Big) = \boldsymbol{\varphi}'_{\mathbf{a},\mathbf{v}}(0) \tag{2.1}$$

Définition 2.2 (Dérivées partielles en un point).
La base naturelle de $\mathbf{R}^p$ étant notée $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_p)$, on appelle *dérivée partielle de* $\mathbf{f}$ *suivant la* j^e *coordonnée*, la dérivée de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ suivant $\boldsymbol{\varepsilon}_j$; on la note $\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}(\mathbf{a})$, ou encore $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ si les variables de $\mathbf{f}$ sont notées $(x_1, \ldots, x_p)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\boldsymbol{\varepsilon}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathbf{f}(a, \ldots, a_j + t, \ldots, a_p) - \mathbf{f}(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_p)\big)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Remarque. Pour une fonction $\mathbf{f}$ écrite par $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$, la dérivée partielle de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ suivant la j^e coordonnée est la dérivée (ordinaire) calculée en $\mathbf{a}$ de $\mathbf{f}$ par rapport à x_j, les autres variables étant considérées comme fixes.

Proposition 2.1 (Dérivée partielle en un point et composantes).
La fonction $\mathbf{f}$ *admet une dérivée partielle en* $\mathbf{a}$ *suivant la* j^e *variable, si, et seulement si, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*, les composantes* f_i *de* $\mathbf{f}$ *admettent une dérivée partielle en* $\mathbf{a}$ *suivant la* j^e *variable ; dans ce cas, on a :*

$$\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \big(\mathrm{D}_j\,f_1(\mathbf{a}), \ldots, \mathrm{D}_j\,f_n(\mathbf{a})\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_j\,f_i(\mathbf{a})\boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{2.3}$$

Preuve. La fonction $\mathbf{f}$ s'écrit : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}_i$, et $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\big)$ existe, si, et seulement si, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f_i(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f_i(\mathbf{a})\big)$ existe pour tout $i \in [\![1, n]\!]$; dans ce cas, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\big) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f_i(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f_i(\mathbf{a})\big)\boldsymbol{\varepsilon}_i$. cqfd

Insuffisance des dérivées partielles. Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable où la dérivabilité implique la continuité, l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point ; l'existence des dérivées en un point suivant tout vecteur, n'implique toujours pas la continuité en ce point. Voici deux exemples.

La fonction $f(x_1, x_2) = x_1 x_2/(x_1^2 + x_2^2)$ pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$ et $f(\mathbf{0}) = 0$, n'est pas continue en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bien que les dérivées partielles existent en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (elles sont nulles) :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_1\,f(\mathbf{0}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(t, 0) - f(0, 0)\big) = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \\ \mathrm{D}_2\,f(\mathbf{0}) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(0, t) - f(0, 0)\big) = \lim_{t\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

La fonction $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^3/(x_1^2 + x_2^6)$ pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$ et $f(\mathbf{0}) = 0$, n'est pas continue en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puisque $f(t^3, t) = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\not\longrightarrow} 0 = f(\mathbf{0})$. Par contre, cette fonction possède en $\mathbf{0}$ des dérivées suivant n'importe quel vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$:

$$\frac{1}{t}\big(f(\mathbf{0}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})\big) = \frac{1}{t} f(v_1 t, v_2 t) = \frac{1}{t}\frac{t v_1 (t v_2)^3}{(t v_1)^2 + (t v_2)^6} = t\frac{v_1 v_2^3}{v_1^2 + t^4 v_2^6} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 = \mathrm{D}_{\mathbf{v}}\,f(\mathbf{0})$$

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.3 (Application dérivée partielle).

On dit que $\mathbf{f}$ admet une dérivée partielle suivant la j^{e} variable sur U si $\mathbf{f}$ admet une dérivée partielle suivant la j^{e} variable en tout point de U ; elle est notée $\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}$ ou $\partial\mathbf{f}/\partial x_j$.

Définition 2.4 (Application de classe $\mathcal{C}^1$).

Une fonction $\mathbf{f}$ est dite *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur U, un ouvert de $\mathbf{R}^p$, si les dérivées partielles $\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}$ sont des fonctions continues sur U pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n)$; $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ est aussi noté $\mathcal{C}^1(U)$.

Théorème 2.2 (Applications de classe $\mathcal{C}^1$ et composantes).

L'application $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ses composantes f_i sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Preuve. Dire que $\mathbf{f}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, c'est dire que les applications $\mathrm{D}_j\,\mathbf{f} = (\mathrm{D}_j\,f_1, \dots, \mathrm{D}_j\,f_p)$ sont continues sur U pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, soit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les applications $\mathrm{D}_j\,f_i$ sont continues sur U pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, ou encore, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les applications f_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. cqfd

Règles de calcul. Les dérivées partielles étant des dérivées (ordinaires) par rapport à une variable, les autres étant considérées comme des paramètres fixes, les règles de calcul, à part la composition, sont identiques aux règles de calcul des dérivées dans le cas d'une variable. Ainsi :

- somme : $\mathrm{D}_j(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}) = \lambda\,\mathrm{D}_j\,\mathbf{f} + \mu\,\mathrm{D}_j\,\mathbf{g}$;
- produit : $\mathrm{D}_j(fg) = (\mathrm{D}_j\,f)g + f\,\mathrm{D}_j\,g$ si f et g sont deux fonctions numériques (réelles ou complexes) ;
- inverse : $\mathrm{D}_j\Big(\dfrac{1}{f}\Big) = -\dfrac{\mathrm{D}_j\,f}{f^2}$ si f est une fonction numérique qui ne s'annule pas ;
- composition avec une application linéaire : $\mathrm{D}_j\big(u(\mathbf{f})\big) = u(\mathrm{D}_j\,\mathbf{f})$ si $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^q)$ et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{K}^n)$; en particulier, $\mathrm{D}_j(\overline{f}) = \overline{\mathrm{D}_j\,f}$, $\mathrm{D}_j(\Re\mathrm{e}\,f) = \Re\mathrm{e}(\mathrm{D}_j\,f)$ et $\mathrm{D}_j(\Im\mathrm{m}\,f) = \Im\mathrm{m}(\mathrm{D}_j\,f)$;
- composition avec une applications bilinéaires : $\mathrm{D}_j\,B(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = B(\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}; \mathbf{g}) + B(\mathbf{f}, \mathrm{D}_j\,\mathbf{g})$ si B est une application bilinéaire de $\mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^m$ dans $\mathbf{K}^q$, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{K}^n)$ et $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{K}^m)$; en particulier :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_j(AB) &= (\mathrm{D}_j\,A)B + A\,\mathrm{D}_j\,B && \text{si } A \text{ et } B \in \mathcal{C}^1(U, \mathcal{M}_n(\mathbf{R}))\\
\mathrm{D}_j(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) &= \mathrm{D}_j\,\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} + \mathbf{f} \wedge \mathrm{D}_j\,\mathbf{g} && \text{si } \mathbf{f} \text{ et } \mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^3)\\
\mathrm{D}_j\langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g}\rangle &= \langle \mathrm{D}_j\,\mathbf{f} \mid \mathbf{g}\rangle + \langle \mathbf{f} \mid \mathrm{D}_j\,\mathbf{g}\rangle && \text{si } \mathbf{f} \text{ et } \mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{C}^1(U)$ est une $\mathbf{R}$-algèbre.

2.3 Dérivée suivant un vecteur pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 2.3. *Si $\mathbf{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{v}$ un vecteur de $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{f}$ admet en tout point $\mathbf{a} \in U$ une dérivée suivant $\mathbf{v}$ qui est donnée par :*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} v_j\,\mathrm{D}_j\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} v_j \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

Preuve.

Cas d'une fonction numérique de deux variables ($p = 2$) pour faciliter la lecture et surtout l'écriture. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in U$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} &= \frac{f(a_1+tv_1, a_2+tv_2) - f(a_1, a_2)}{t} \\
&= \frac{f(a_1+tv_1, a_2+tv_2) - f(a_1, a_2+tv_2)}{t} + \frac{f(a_1, a_2+tv_2) - f(a_1, a_2)}{t} \\
&= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 tv_1, a_2+tv_2) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2\theta_2 tv_2)
\end{aligned}$$

(égalité des accroissements finis pour les fonctions réelles d'*une* variable, θ_1 et $\theta_2 \in]0,1[$)

$$\underset{t\to 0}{\longrightarrow} v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = v_1 \,\mathrm{D}_1 f(\mathbf{a}) + v_2 \,\mathrm{D}_2 f(\mathbf{a})$$

(continuité des dérivées partielles)

Cas d'une fonction vectorielle $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_{\mathbf{v}} f_i(\mathbf{a}) \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_{j=1}^{p} v_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

cqfd

Remarque. Pour aller de $\mathbf{a}$ à $\mathbf{a}+\mathbf{h} = \mathbf{a}+t\mathbf{v}$, nous avons pris le chemin des écoliers, à savoir un chemin dont les côtés sont parallèles aux axes ; c'est une obligation pour utiliser l'égalité des accroissements finis des fonctions d'*une* variable réelle : sur chacun des côtés, toutes les variables sont fixés, exceptées l'une d'entre elles. Le bon chemin, qui est la ligne droite, ne peut être utilisé pour l'instant ; ce n'est que partie remise.

2.4 Développement limité à l'ordre un des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 2.4. *Si* $\mathbf{f}$ *est une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert de* $\mathbf{R}^p$*, on a :*

$$\forall \mathbf{a} \in U,\ \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}\to \mathbf{0}}{=} \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathrm{o}\big(\|\mathbf{h}\|\big) \tag{2.4}$$

Preuve.

Cas d'une fonction numérique de deux variables ($p = 2$) pour faciliter la lecture et surtout l'écriture. Si $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ et $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in U$, on a, en utilisant le chemin des écoliers à côtés parallèles aux axes :

$$\begin{aligned}
&\Big| f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \Big| \\
&\quad \leqslant \Big| f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \Big| \\
&\qquad\qquad + \Big| f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \Big| \\
&\quad = |h_1| \Big| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \Big| + |h_2| \Big| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \Big|
\end{aligned}$$

égalité des accroissements finis pour les fonctions réelles d'*une* variable, θ_1 et $\theta_2 \in]0,1[$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \|\mathbf{h}\|_\infty \Big(\Big| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \Big| + \Big| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \Big| \Big) \\
&= \|\mathbf{h}\|_\infty \varepsilon(\mathbf{h}) \qquad \text{avec } \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0 \text{ car } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_2} \text{ sont continues au point } \mathbf{a}
\end{aligned}$$

Cas d'une fonction vectorielle $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$:

$$\begin{aligned}\Big\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \sum_{j=i}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}(\mathbf{a})\Big\|_\infty &= \sup_i \Big| f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f_i(\mathbf{a}) - \sum_{j=i}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j\, f_i(\mathbf{a})\Big| \\ &= \sup_i \big(\|\mathbf{h}\|_\infty\, |\varepsilon_i(\mathbf{h})|\big) = \|\mathbf{h}\|_\infty \sup_i \big(|\varepsilon_i(\mathbf{h})|\big) \underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{=} \mathrm{o}(\|\mathbf{h}\|_\infty)\end{aligned}$$

cqfd

Remarque. Le théorème précédent s'interprète de la manière suivante : l'accroissement $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ de la fonction $\mathbf{f}$ au voisinage du point $\mathbf{a}$ est de l'ordre de $\sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})$; à un terme près négligeable devant $\|\mathbf{h}\|$, on peut donc remplacer $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{a})$ par $\sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})$.

Corollaire (Continuité des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ est continue sur U.

Preuve. $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathrm{o}(\|\mathbf{h}\|) \underset{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} \mathbf{0}$ cqfd

3 Différentielle d'une fonction

Définition 3.1 (Différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$).
Si $\mathbf{f}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^p$ et $\mathbf{a} \in U$, l'application

$$\mathbf{h} \in \mathbf{R}^p \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{h}}\, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} h_j \,\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \tag{3.1}$$

est une application linéaire ; elle est appelée *différentielle de* $\mathbf{f}$ *au point* $\mathbf{a}$ et notée $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Remarque. Avec ces notations, on obtient :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \mathrm{o}(\|\mathbf{h}\|)$$

$\mathbf{f}$ est approchée par une application linéaire au voisinage de $\mathbf{a}$.

Définition 3.2 (Matrice jacobienne).
La matrice de l'application linéaire $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$ relativement aux bases naturelles de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$, est appelée *matrice jacobienne* de $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{a}$ et notée $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$; ainsi $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ est une matrice à n lignes (n le nombre de composantes de $\mathbf{f}$, *i.e.* la dimension de l'espace but) et p colonnes (p le nombre de variables, *i.e.* la dimension de l'espace source).

$$\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \big(\mathrm{D}_1\, \mathbf{f}(\mathbf{a}), \dots, \mathrm{D}_p\, \mathbf{f}(\mathbf{a})\big) = \big[\mathrm{D}_j\, f_i(\mathbf{a})\big]_{i,j} = \Big[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\Big]_{i,j} \tag{3.2}$$

Exemples 3.1.

– Cas d'une fonction vectorielle d'*une* variable réelle : $p = 1$. Soit $\mathbf{f} : t \in I \subset \mathbf{R} \mapsto \mathbf{f}(t) = \big(f_1(t), \dots, f_p(t)\big)$; $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(t)$ est la matrice colonne ${}^t\big(f_1'(t), \dots, f_p'(t)\big)$ et $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(t)$ s'identifie avec le vecteur dérivée $\mathbf{f}'(t)$.
– Cas d'une fonction *numérique* de p variables : $n = 1$. Soit $f : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p) \in U \subset \mathbf{R}^p \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$; $\mathrm{J}_f(\mathbf{a})$ est la matrice ligne $\big(\mathrm{D}_1\, f(\mathbf{a}), \dots, \mathrm{D}_p\, f(\mathbf{a})\big) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{a})\big)$ et $\mathrm{J}_f(\mathbf{a})$ s'identifie au vecteur gradient de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$.
– Cas général. Soit $\Phi : (r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbf{R}^2$; $\mathrm{J}_\Phi(r, \theta)$ est une matrice à deux lignes et deux colonnes :

$$\mathrm{J}_\Phi(r, \theta) = \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta), \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, \theta)\Big) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant l'application $z \in \mathbf{C} \mapsto \exp z$ que l'on identifie en une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ par $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$; la matrice jacobienne $\mathrm{J}_f(x, y)$ est une matrice carrée d'ordre deux et :

$$\mathrm{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Définition 3.3 (Jacobien).
Le déterminant de la matrice jacobienne est appelé *jacobien* de $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{a}$. Ceci n'a, bien sûr, de sens que si la matrice jacobienne est une matrice *carrée.*

Reprenons les exemples précédents ; $\det \mathrm{J}_\Phi(r, \theta) = r$, ce qui montre que $\mathrm{J}_\Phi(r, \theta)$ est une matrice inversible, si, et seulement si, r est un nombre différent de zéro ; $\det \mathrm{J}_f(x, y) = e^x$ et la matrice jacobienne $\mathrm{J}_f(x, y)$ est toujours inversible.

4 Composition des applications de classe $\mathcal{C}^1$

4.1 La situation

Considérons $\mathbf{f}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, dont les variables sont notées $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, et $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbf{R}^q$ à valeurs dans U pour permettre la composition, dont les variables sont notées $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_q)$. On pose $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi}$.

Il nous faut montrer que $\mathbf{g}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert V, et surtout, donner une formule du calcul des dérivées partielles $\mathrm{D}_k\, \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_k}$ en un point $\boldsymbol{\tau} \in V$ en fonction des dérivées partielles de $\mathbf{f}$ et de $\boldsymbol{\varphi}$.

4.2 Un cas particulier $q = 1$

On considère $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n)$ et $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathcal{C}^1(I, U)$ avec I un intervalle de $\mathbf{R}$; ainsi

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} : t \in I \mapsto \mathbf{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big) = \mathbf{f}\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)\big)$$

Proposition 4.1. *Si* $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n)$ *et* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathcal{C}^1(I, U)$*,* $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi}$ *est une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* I *et :*

$$\forall t \in I,\ \mathbf{g}'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi}(t)\Big) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\varphi_j'(t) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{\varphi}'(t)}\, \mathbf{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big) \tag{4.1}$$

Preuve. Dans le cas particulier de deux variables pour $\mathbf{f}$ ($p = 2$), pour faciliter la compréhension et l'écriture.

Calculons le développement limité de $\mathbf{g}$ à l'ordre 1 au voisinage de $t = \tau$; on posera $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$; commençons par celui de $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau + h) = \boldsymbol{\varphi}(\tau) + h\boldsymbol{\varphi}'(\tau) + h\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \mathbf{a} + \mathbf{H}$$

en posant $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}(\tau)$; continuons par celui de l'application $\mathbf{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathbf{x} = \mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{H}) &= \mathbf{f}(\mathbf{a}) + H_1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + H_2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \mathrm{o}(\|\mathbf{H}\|) \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \big(h\varphi_1'(\tau) + h\varepsilon_1(h)\big)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \big(h\varphi_2'(\tau) + h\varepsilon_2(h)\big)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{a}) + \mathrm{o}(\|\mathbf{H}\|) \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{a}) + h\Big(\varphi_1'(\tau)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \varphi_2'(\tau)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{a})\Big) + \mathrm{o}(h)
\end{aligned}$$

car $\mathbf{H} = h\boldsymbol{\varphi}'(\tau) + h\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \mathrm{O}(h)$, ce qui implique que tout expression négligeable devant $\|\mathbf{H}\|$, est négligeable devant h. Bref, nous venons de calculer le développement limité de $\mathbf{g}$ à l'ordre un, au voisinage de $t = \tau$; le coefficient de h est le vecteur dérivée $\mathbf{g}'(\tau)$, soit

$$\mathbf{g}'(\tau) = \varphi_1'(\tau)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \varphi_2'(\tau)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{a}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{\varphi}'(\tau)}\,\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Remarquons que $t \mapsto \mathbf{g}'(t)$ est une fonction continue, ce qui assure la classe $\mathcal{C}^1$ pour $\mathbf{g}$. cqfd

Interprétation à l'aide des jacobiennes

La matrice jacobienne $\mathrm{J}_{\mathbf{g}}(t)$ est la matrice colonne des composantes du vecteur $\mathbf{g}'(t)$, soit $\mathrm{J}_{\mathbf{g}}(t) = \big(\mathbf{g}'(t)\big) = \big(\sum_{j=1}^{p} \varphi_j'(t)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\varphi(t))\big)$, égale au produit des matrices jacobiennes $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)$ et $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)$.

$$\mathrm{J}_{\mathbf{g}}(t) = \big(\mathbf{g}'(t)\big) = \mathrm{J}_{\mathbf{f}}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big) \times \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \Big(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big), \ldots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_p}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\Big) \times \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_p'(t) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Interprétation à l'aide des différentielles

Partons de la différentielle de $\mathbf{f}$: $\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_j$. Le calcul de la différentielle de $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} : t \mapsto \mathbf{f}\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)\big)$ s'effectue en substituant à $\mathrm{d}x_j$ la différentielle $\mathrm{d}\varphi_j(t) = \varphi_j'(t)\,\mathrm{d}t$ de φ_j :

$$\mathrm{d}\mathbf{g}(t) = \mathrm{d}\Big(\mathbf{f}\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t)\big)\Big) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\,\mathrm{d}\varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\varphi_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\mathrm{d}\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}'(t)\,\mathrm{d}t$, le « coefficient » de $\mathrm{d}t$ donne la dérivée $\mathbf{g}'(t)$ et la formule est retrouvée.

4.3 Le cas général

Théorème 4.2 (Composition de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$).

Si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n)$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1(V, U)$, la fonction

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} : \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_q) \mapsto \mathbf{f}\big(\varphi_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, \varphi_q(t_1, \ldots, t_q)\big)$$

est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert V et, en posant $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\tau})$,

$$\forall k \in [\![1, q]\!],\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_k}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\boldsymbol{\tau}) \tag{4.3}$$

que l'on écrit aussi :

$$\mathrm{D}_k\,\mathbf{g}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{D}_j\,\mathbf{f}(\mathbf{a})\,\mathrm{D}_k\,\varphi_j(\boldsymbol{\tau}) \tag{4.4}$$

Preuve. $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_k}(\boldsymbol{\tau})$ est la dérivée (ordinaire) de la fonction d'*une* variable

$$t \mapsto \mathbf{g}(\tau_1, \ldots, t, \ldots, \tau_q) = \mathbf{f}\big(\varphi_1(\tau_1, \ldots, t, \ldots, \tau_q), \ldots, \varphi_p(\tau_1, \ldots, t, \ldots, \tau_q)\big)$$

calculée au point $t = \tau_k$, la variable t se plaçant en k^{e} place. La formule précédente donne le résultat.

Remarquons que, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, les applications $\partial \mathbf{g}/\partial t_k$ sont continues, ce qui assure la classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{g}$ sur V. cqfd

Interprétation à l'aide des matrices jacobiennes

La formule précédente s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\mathrm{J}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\tau}) = \mathrm{J}_{\mathbf{f}}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\tau})\big) \times \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\tau}) \tag{4.5}$$

Interprétation à l'aide des différentielles

Partons de la différentielle de $\mathbf{f}$: $\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_j$. Le calcul de la différentielle de

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \boldsymbol{\varphi} : \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_q) \mapsto \mathbf{f}\big(\varphi_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, \varphi_p(t_1, \ldots, t_q)\big)$$

s'effectue en substituant à $\mathrm{d}x_j$ la différentielle $\mathrm{d}\varphi_j(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_k$ de φ_j :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{t}) &= \mathrm{d}\Big(\mathbf{f}\big(\varphi_1(t_1, \ldots, t_q), \ldots, \varphi_p(t_1, \ldots, t_q)\big)\Big) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\big)\,\mathrm{d}\varphi_j(\mathbf{t}) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\big)\Big(\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_k\Big) = \sum_{k=1}^{q}\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})\big)\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(\mathbf{t})\Big)\,\mathrm{d}t_k
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_k}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_k$, le « coefficient » de $\mathrm{d}t_k$ donne la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_k}$ et la formule est retrouvée.

4.4 Une application

Proposition 4.3. *Si A et I sont deux intervalles de $\mathbf{R}$ et f une fonction numérique (réelle ou complexe) continue sur $A \times I$ telle que $\partial f/\partial x$ soit aussi continue sur $A \times I$, la fonction*

$$F : (u, v, w) \mapsto \int_u^v f(w, t)\,\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times I \times A$.

Preuve. Les fonctions $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v, w) = -f(w, u)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v, w) = f(w, v)$ sont continues sur $I \times I \times A$, ainsi que la fonction :

$$\frac{\partial F}{\partial w}(u, v, w) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(w, t)\,\mathrm{d}t = \int_u^v \mathrm{D}_1\, f(w, t)\,\mathrm{d}t$$

dont la démonstration (non évidente) est laissée aux soins du lecteur. cqfd

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses et pour αet $\beta \in \mathcal{C}^1(A, I)$, la fonction*

$$g : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A,\ g'(x) = \beta'(x) f\big(\beta(x), x\big) - \alpha(x) f\big(\alpha(x), x)\big) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

Preuve. Utilisant les notations de la proposition précédente, $g(x) = F\big(\alpha(x), \beta(x), x)\big)$; le théorème de composition montre que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F\big(\alpha(x), \beta(x), x)\big)\Big) \\
&= \frac{\partial F}{\partial u}\big(\alpha(x), \beta(x), x)\big)\alpha'(x) + \frac{\partial F}{\partial v}\big(\alpha(x), \beta(x), x)\big)\beta'(x) + \frac{\partial F}{\partial w}\big(\alpha(x), \beta(x), x)\big) \\
&= -f\big(\alpha(x), x)\big)\alpha'(x) + f\big(\beta(x), x)\big)\beta'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

cqfd

5 Coordonnées polaires

5.1 Argument d'un nombre complexe

5.1.1 Cas des nombres complexes de module 1

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Rappelons qu'un argument de $z \neq 0$, noté $\arg z$, est un nombre réel tel que $z = |z| \exp(\mathrm{i} \arg z)$; ce nombre n'est pas unique, deux arguments d'un même nombre complexe diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Théorème 5.1 (Détermination principale de l'argument).
$\theta \mapsto \exp \mathrm{i}\theta = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ réalise une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbf{U} \setminus \{-1\}$, dont l'application réciproque

$$z \in \mathbf{U} \mapsto \operatorname{Arg} z = 2 \arctan \frac{y}{1+x} \tag{5.1}$$

est continue ($x = \Re\mathrm{e}\, z$, $y = \Im\mathrm{m}\, y$, $x^2 + y^2 = 1$ et $x \neq -1$).

Preuve. Seule la réciproque mérite une démonstration. Si $z = \exp(\mathrm{i}\theta) = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{U} \setminus \{-1\}$, le quadrilatère de sommets $(0, 1, 1 + z, z)$ est un losange (parallélogramme avec deux côtés successifs de même longueur) ; le nombre complexe $1 + z$, diagonale de ce losange, dirige la bissectrice, son argument est $\theta/2$ et

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\Im\mathrm{m}(1+z)}{\Re\mathrm{e}(1+z)} = \frac{y}{1+x} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\theta}{2} = \arctan\frac{y}{1+x}$$

puisque $\theta/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Une démonstration analytique est possible : $1 + z = 1 + \exp(\mathrm{i}\theta) = \exp(\mathrm{i}\theta/2)\big(\exp(-\mathrm{i}\theta/2) + \exp(\mathrm{i}\theta/2)\big) = 2(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}\theta/2)$, nombre complexe de module $2\cos(\theta/2)$ et d'argument $\theta/2$, *etc.*...

cqfd

5.1.2 Cas des nombres complexes en dehors du demi-axe réel négatif

La fonction Arg se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur la partie ouverte $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$, appelée *détermination principale de l'argument*, par

$$\boxed{\forall z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0],\ \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}\Big(\frac{z}{|z|}\Big) = 2\arctan\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}}$$

Remarquons que $x + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff x = -\sqrt{x^2+y^2}$ et $x^2 = x^2 + y^2 \iff y = 0$ et $x \leqslant 0 \iff z = x + \mathrm{i}y \in]-\infty, 0]$

Remarques.

Il y a des difficultés à prendre $\arctan(y/x)$ ou $\arctan(x/y) + cte$, car l'expression de l'argument utilisant ce type de formule dépend du quadrant dans lequel se place z.

La fonction Arg ne peut se prolonger en $z = -1$ en une fonction continue sur $\mathbf{U}$, car la limite de $\operatorname{Arg} z$ quand z tend vers -1 en restant, à la fois, dans $\mathbf{U}$ et dans le demi-plan supérieur (resp. inférieur) est π (resp. $-\pi$).

On peut, par contre, suivre « à la trace » l'argument d'un nombre complexe qui varie continûment ; c'est l'objet du théorème du relèvement.

5.1.3 Relèvement d'une application

Théorème 5.2 (Relèvement d'une application à valeurs dans U).
Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{U})$ ($k \in [\![1, +\infty]\!]$), il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, unique à l'addition d'un multiple entier de 2π, telle que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = \exp\big(\mathrm{i}\theta(t)\big) \tag{5.2}$$

Preuve. Analyse. Une dérivation donne $f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)\exp\big(\mathrm{i}\theta(t)\big) = \mathrm{i}\theta'(t)f(t)$, soit

$$\forall t \in I,\ \theta'(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

La fonction θ est unique à une constante près, constante qui ne peut-être qu'un multiple entier de 2π pour permettre l'égalité des arguments.

Synthèse. Soient $t_0 \in I$ et θ *la* primitive de $-\mathrm{i}f'/f$ qui vaut $\mathrm{Arg}\big(f(t_0)\big)$ si $f(t_0) \neq -1$ ou π sinon. Attention de ne pas parler de logarithme, puisque la fonction $-\mathrm{i}f'/f$ est à valeurs complexes. Ainsi,

$$\forall t \in I,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f(t)\exp\big(-\mathrm{i}\theta(t)\big)\Big) = f'(t)\exp\big(-\mathrm{i}\theta(t)\big) + f(t)\exp\big(-\mathrm{i}\theta(t)\big)\big(-\mathrm{i}\theta'(t)\big) = 0$$

La fonction $t \mapsto f(t)\exp\big(-\mathrm{i}\theta(t)\big)$ est constante sur l'*intervalle* I, égale à 1 vu sa valeur en t_0, ce qui donne le résultat. D'autre part, la fonction θ est de classe $\mathcal{C}^k$ puisque θ' est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. cqfd

Corollaire (Relèvement d'une application à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$).

Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{C} \setminus \{0\})$ ($k \in [\![1, +\infty]\!]$), il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, unique à l'addition d'un multiple entier de 2π, telle que :

$$\forall t \in I,\ f(t) = \big|f(t)\big|\exp\big(\mathrm{i}\theta(t)\big) \tag{5.3}$$

Preuve. On applique le théorème précédent à la fonction $t \mapsto f(t)/\big|f(t)\big|$. cqfd

Remarques.

Ce corollaire montre que toute courbe plane qui ne passe pas par l'origine, est susceptible d'être représentée à l'aide d'une paramétrisation polaire.

Le théorème du relèvement est encore vraie pour les applications continues, mais sa démonstration en est plus délicate.

5.2 Repère polaire du plan euclidien

Considérons un plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'une base orthonormée (fixe) $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Définition 5.1 (Repère polaire).

La base orthonormale (mobile) $\big(\mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta)\big)$, image de $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ par la rotation vectorielle (plane) d'angle $\theta \in \mathbf{R}$, est appelée *repère polaire* de $\mathcal{P}$.

$$\forall \theta \in \mathbf{R},\ \mathbf{u}(\theta) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \text{ et } \mathbf{v}(\theta) = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \tag{5.4}$$

Remarques.

Les fonctions vectorielles $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\theta} = \mathbf{v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\theta} = -\mathbf{u} \tag{5.5}$$

Les physiciens préfèrent les notations $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$; attention de ne pas oublier que $\mathbf{e}_r$ n'est pas une fonction de r mais de θ.

Définition 5.2 (Coordonnées polaires d'un point de $\mathcal{P}$).

Si M est un point de $\mathcal{P}$, les couples (r, θ) tels que

$$\overrightarrow{OM} = r\,\mathbf{u}(\theta) \tag{5.6}$$

sont appelés *coordonnées polaires du point$M$.*

Remarque. Les coordonnées polaires d'un point ne sont pas uniques :

- si M est l'origine, les couples $(0, \theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$, conviennent ;
- si M n'est pas l'origine, $\overrightarrow{OM} \neq \mathbf{0}$ et $\overrightarrow{OM} = r_1\mathbf{u}(\theta_1) = r_2\mathbf{u}(\theta_2) \iff \big(r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}\big)$ ou $\big(r_1 = -r_2 \text{ et } \theta_1 + \pi \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}\big)$

En appelant $\mathcal{D}_-$ le demi-axe réel négatif, tout point $M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}_-$ (le plan « fendu »), admet des coordonnées polaires (r, θ) uniques à condition de les prendre dans $]0, +\infty[\, \times\,]-\pi, \pi[$.

5.3 Changement de variables en coordonnés polaires

Le changement de variables. Posons $\boldsymbol{\varphi} : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$; $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et

$$\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\varphi}$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus]-\infty,0]\times\{0\}$ dont la réciproque

$$(x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivées partielles par rapport à r et θ. À toute application $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$, on associe $F = f \circ \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}\setminus\{0\}\times\mathbf{R})$; on a

$$\begin{aligned} F : (r,\theta) &\mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \end{aligned}$$

Puisque $r \neq 0$, les égalités précédents s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en inversant la matrice :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) = \sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

Expression du gradient en coordonnées polaires

Rappelons que le vecteur gradient s'écrit :

$$(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathbf{j}$$

Calculons les coordonnées de ce vecteur dans le repère (mobile) polaire $(\mathbf{u},\mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \langle(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)(r\cos\theta,r\sin\theta) \mid \mathbf{u}\rangle &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \\ \langle(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)(r\cos\theta,r\sin\theta) \mid \mathbf{v}\rangle &= -\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right)(r\cos\theta,r\sin\theta) = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\,\mathbf{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\,\mathbf{v} = \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\,\mathbf{e}_\theta$$

Expression de la divergence en coordonnées polaires.

À un champ de vecteurs $\mathbf{E}$ défini sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, *i.e.* une application de classe $\mathcal{C}^1$ d"finie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$], on associe la fonction $\mathcal{E} = \mathbf{E} \circ \boldsymbol{\varphi}$. Les composantes de $\mathbf{E}$ (resp. $\mathcal{E}$) dans le repère (fixe) $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ sont notées E_x et E_y (resp. $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$) et les composantes de $\mathbf{E}$ (resp. $\mathcal{E}$) dans le repère (mobile) $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sont notées E_r et E_θ (resp. $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{E}_\theta$). On a

$$(\operatorname{div}\mathbf{E})(x,y) = \frac{\partial E_x}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x,y)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathbf{E})(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\partial E_x}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= \Big(\cos\theta \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \theta}(r,\theta)\Big) + \Big(\sin\theta \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \theta}(r,\theta)\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\cos\theta\,\mathcal{E}_x(r,\theta) + \sin\theta\,\mathcal{E}_y(r,\theta)\Big) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(-\sin\theta\,\mathcal{E}_x(r,\theta) + \cos\theta\,\mathcal{E}_y(r,\theta)\Big) \\
&\qquad - \frac{1}{r}\Big(-\cos\theta\,\mathcal{E}_x(r,\theta) - \sin\theta\,\mathcal{E}_y(r,\theta)\Big) \\
&= \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{1}{r}\mathcal{E}_r(r,\theta)
\end{aligned}$$

soit

$$(\operatorname{div}\mathbf{E})(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{1}{r}\mathcal{E}_r(r,\theta)$$

6 Difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$

6.1 Généralités

Définition 6.1 (Difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$).

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbf{R}^p$, une application $\boldsymbol{\varphi}$ est appelée un $\mathcal{C}^1$-*difféomorphisme de* U *sur* V, si $\boldsymbol{\varphi}$ réalise une bijection de U sur V de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$.

Exemple 6.1. Le changement de coordonnées polaires est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \big\{]-\infty,0]\times\{0\}\big\}$.

Théorème 6.1 (Matrice jacobienne et jacobien d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).

Si $\boldsymbol{\varphi}$ *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* U *sur* V*, deux ouverts de* $\mathbf{R}^p$*, pour tout* $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$*, la matrice jacobienne* $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{a})$ *est inversible, le jacobien* $\det \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{a})$ *est différent de* 0 *et*

$$\forall \mathbf{a} \in U,\ \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}}(\mathbf{b}) = \Big(\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{a})\Big)^{-1} \qquad \text{en posant } \mathbf{b} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) \tag{6.1}$$

Preuve. De la relation $\boldsymbol{\varphi}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi} = I_U$ (application identique de U), on tire, à l'aide du théorème de composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\forall \mathbf{a} \in U,\ \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}}\big(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{b})\big) \times \mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{a}) = \mathrm{J}_{I_U}(\mathbf{a}) = I_p \qquad \text{avec } \mathbf{b} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a})$$

Ainsi, $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{a})$ est une matrice inversible d'inverse $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}}(\mathbf{b})$. cqfd

Remarque. Une application dont le jacobien s'annule, ne peut être un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

6.2 Caractérisation des difféomorphismes à l'aide du jacobien

Théorème 6.2 (Cas local).
Si $\boldsymbol{\varphi}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, et si, en un point $\mathbf{a} \in U$, la matrice jacobienne $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{a})$ est inversible, il existe un ouvert $U_{\mathbf{a}} \subset \mathbf{R}^p$ qui contient $\mathbf{a}$, tel que la restriction de $\boldsymbol{\varphi}$ à $U_{\mathbf{a}}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U_{\mathbf{a}}$ sur son image $\boldsymbol{\varphi}(U_{\mathbf{a}})$ qui est aussi, dans ce cas, une partie ouverte.

Preuve. Admise. cqfd

Remarques.
En une variable ($p = 1$), l'inversibilité de $\mathrm{J}_{\varphi(a)} = \big(\varphi'(a)\big)$ signifie la non nullité de $\varphi'(a)$; ainsi, φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un intervalle ouvert contenant a sur son image qui est un intervalle ouvert.

Le changement de variables en polaires a un jacobien qui vaut r ; $\boldsymbol{\varphi}$ ne peut être un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur un voisinage de $(x, y) = \mathbf{0}$. Par contre, en tout point distinct de l'origine, $\boldsymbol{\varphi}$ est localement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ; mais $\boldsymbol{\varphi}$ ne peut être un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, puisque $\boldsymbol{\varphi}$ n'y est pas injectif.

Théorème 6.3 (Cas global).
Si $\boldsymbol{\varphi}$ est une application injective *de classe $\mathcal{C}^1$ d'un* ouvert *$U \subset \mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{\varphi}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $\boldsymbol{\varphi}(U)$ si, et seulement si, le jacobien de $\boldsymbol{\varphi}$ ne s'annule pas sur U.*

Preuve. Admise. cqfd

Remarques.
En plusieurs variables, l'injectivité de $\boldsymbol{\varphi}$ est essentielle : le changement en coordonnées polaires a un jacobien non nul pour $r \neq 0$ et la restriction de $\boldsymbol{\varphi}$ à $]0, +\infty[\, \times \mathbf{R}$ n'est pas injective.

L'hypothèse que U soit une partie ouverte est indispensable car la restriction de $\boldsymbol{\varphi}$, le changement en coordonnées polaires, à la partie non ouverte $]0, +\infty[\, \times \,]-\pi, \pi]$ est bijective, de jacobien non nul, mais $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ n'est pas une application continue aux points de l'axe réel négatif.

Exemple 6.2. Le changement de variables en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \, \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \, \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

définit une application $\boldsymbol{\Phi} : (r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mapsto (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. On observe que :

$$\mathrm{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\, \cos\varphi & r\cos\theta\, \cos\varphi & -r\sin\theta\, \sin\varphi \\ \sin\theta\, \sin\varphi & r\cos\theta\, \sin\varphi & r\sin\theta\, \cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \det \mathrm{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(r\theta, \varphi) = r^2 \sin\theta$$

$\boldsymbol{\Phi}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de tout point distinct de l'axe Oz ($\theta = 0$ ou π) ; $\boldsymbol{\Phi}$ est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[\, \times \,]0, \pi[\, \times \,]-\pi, \pi[$ sur $\mathbf{R}^3$ privé du demi-plan $\{y = 0, x \leqslant 0\}$.

6.3 Équations aux dérivées partielles et changement de variables

Voici quelques résolutions d'équations aux dérivées partielles. Tout d'abord, les plus simples en deux variables ; on recherchera des fonctions numériques $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}),\ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = \varphi(y) \qquad f \text{ ne dépend que de } y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}),\ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = \varphi(x) \qquad f \text{ ne dépend que de } x$$

De plus en plus fort, le cas de trois variables ; on recherchera $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2),\ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = \varphi(y,z) \qquad f \text{ ne dépend que de } y \text{ et } z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2),\ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = \varphi(x,z) \qquad f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0 \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2),\ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ f(x,y,z) = \varphi(x,y) \qquad f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y$$

Remarquons que les solutions dépendent de fonctions et pas de constantes comme dans le cas des équations différentielles dites ordinaires.

7 Fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$

7.1 L'algèbre $\mathcal{C}^1(U)$

Si U est une partie ouverte de $\mathbf{R}^p$, $\mathcal{C}^1(U)$ est la $\mathbf{R}$-algèbre des fonctions numériques réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Rappelons les règles de calcul des différentielles dans ce cas :

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \\
\mathrm{d}(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}f \\
\mathrm{d}(fg) = \mathrm{d}f\, g + f\, \mathrm{d}g \\
\mathrm{d}\Big(\frac{1}{f}\Big) = -\frac{1}{f^2}\,\mathrm{d}f \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{1}{g^2}(\mathrm{d}f\, g - f\, \mathrm{d}g)
\end{gathered}$$

7.2 Gradient d'une fonction numérique

Définition 7.1 (Vecteur gradient en un point).
Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^p$ muni de son produit scalaire naturel, pour toute fonction *numérique* f de classe $\mathcal{C}^1$, on pose :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\varepsilon_j = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{D}_j\, f(\mathbf{a})\varepsilon_j \tag{7.1}$$

Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \mathrm{D}_{\mathbf{h}}\, f(\mathbf{a}) &= \sum_{j=1}^{p} h_j\, \mathrm{D}_j\, f(\mathbf{a}) = \big\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\mathbf{a}) \;\big|\; \mathbf{h} \big\rangle \\
\text{et} \qquad f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= \big\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\mathbf{a}) \;\big|\; \mathbf{h} \big\rangle + \mathrm{o}(\|\mathbf{h}\|)
\end{aligned}$$

Remarque. Le théorème de représentation de Riesz définit le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f(\mathbf{a})}$ de manière *intrinsèque*, *i.e.* sans l'utilisation d'une base, à l'aide de l'expression $\mathrm{d}f(\mathbf{a}) = \big\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\mathbf{a}) \;\big|\; \mathbf{h} \big\rangle$.

7.3 Extrema d'une fonction numérique

Définition 7.2 (Extremum local).
L'application $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ admet en $\mathbf{a}$ un *maximum local* (resp ; *minimum local*) s'il existe un voisinage $U_{\mathbf{a}}$ de $\mathbf{a}$ tel que :

$$\forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}},\ f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{a}) \qquad (\text{resp. } \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}},\ f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{a})) \tag{7.2}$$

Définition 7.3 (Extremum global).
L'application $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ admet en $\mathbf{a}$ un *maximum global* (resp ; *minimum global*) si

$$\forall \mathbf{x} \in U,\ f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{a}) \qquad (\text{resp. } \forall \mathbf{x} \in U,\ f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{a})) \tag{7.3}$$

Théorème 7.1 (Compacité et extrema globaux).
Toute application numérique continue sur une partie compacte *de* $\mathbf{R}^p$ *admet un maximum et un minimum global sur cette partie ; ces extrema sont atteints.*

PREUVE. Admise cqfd

Remarque. La compacité et la continuité montre l'*existence* d'extrema globaux mais la démonstration du théorème n'est pas une démonstration *effective* : la démonstration ne donne pas de méthode de les calculer.

7.4 Point critique d'une fonction numérique

Définition 7.4 (Point critique d'une fonction numérique).
Si f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$, un point $\mathbf{a} \in U$ est appelé *point critique de* f si le vecteur gradient de f en $\mathbf{a}$ est nul, *i.e.* si

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = 0$$

Théorème 7.2 (Condition *nécessaire* d'existence d'extremum local).
Si f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^p$, les extrema locaux de f sont à chercher parmi *les points critiques de* $\mathbf{f}$*.*

PREUVE. Soient $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^p$ et $\varphi_{\mathbf{h}} : t \in \mathbf{R} \mapsto f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$; si f admet un extremum local en $\mathbf{a}$, pour tout $\mathbf{h}$, la fonction $\varphi_{\mathbf{h}}$ admet un extremum local en $t = 0$, et donc $0 = \varphi'_{\mathbf{h}}(0) = \sum_{j=1}^{p} h_j \operatorname{D}_j f(\mathbf{a})$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $\operatorname{D}_j f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

La fonction $t \mapsto t^3$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbf{R}$, strictement monotone et qui admet un point critique en $t = 0$. Ceci montre qu'un point critique n'est pas *toujours* un extremum local. cqfd

7.5 Inégalité des accroissements finis

Théorème 7.3 (Inégalité des accroissements finis sur un ouvert convexe).
Si U est un ouvert convexe *de $\mathbf{R}^p$, f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et k une constante positive telle que, pour tout $\mathbf{x} \in U$,* $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ *soit une application lipschitzienne de rapport k, alors :*

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U, \; \big|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\big| \leqslant k\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \tag{7.4}$$

PREUVE. Soit $\boldsymbol{\varphi} : t \in [0,1] \mapsto (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ le paramétrage naturel du segment $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, segment inclus dans U, puisque U est convexe. Posons $F = f \circ \boldsymbol{\varphi}$; F est une application de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\big((1-t)a_1 + tb_1, \ldots, (1-t)a_p + tb_p\big)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{p} (b_j - a_j) D_j f\big((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\big) = \big[\mathrm{d}f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\big](\mathbf{b} - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la constante de Lipschitz k, on a :

$$\forall t \in [0,1], \; \big|F'(t)\big| = \big|\big[\mathrm{d}f\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\big](\mathbf{b} - \mathbf{a})\big| \leqslant k\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

Nous venons de démontrer que F est une fonction lipschitzienne de rapport $k\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$ sur le segment $[0,1]$, ce qui donne le résultat :

$$\big|F(1) - F(0)\big| = \big|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\big| \leqslant (1-0)k\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = k\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

cqfd

Remarques.

La lectrice et le lecteur, attentifs, auront remarqué que pour aller de **a** à **b** nous avons pris la *ligne droite* et non pas un chemin à côtés parallèles aux axes. Ce qui n'était pas (encore) possible au début du chapitre, l'est devenu : le théorème de composition des différentielles est passé par là.

Ce n'est pas tant le résultat qui est important, mais *la méthode de démonstration* : l'utilisation d'une fonction auxiliaire a permis de transformer la majoration d'une fonction de plusieurs variables, en une majoration d'une fonction d'*une seule* variable.

Théorème 7.4 (Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).

Si U est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^p$ et f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est une fonction constante sur U ;*
(ii) *pour tout $\mathbf{x} \in U$, $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ est l'application nulle ;*
(iii) $\forall j \in [\![1,p]\!],\ \forall \mathbf{x} \in U,\ \mathrm{D}_j\, f(\mathbf{x}) = 0$.

Preuve. La matrice ligne $\big(\mathrm{D}_1\, f(\mathbf{x}), \dots, \mathrm{D}_p\, f(\mathbf{x})\big)$ est la matrice de la différentielle de f en $\mathbf{x}$ $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$, ce qui montre l'équivalence des assertions (ii) et (iii).

$(i) \implies (iii)$ est évident.

$(ii) \implies (i)$ Pour tout $\mathbf{x} \in U$, l'application (nulle) $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ est lipschitzienne de rapport $k = 0$; l'inégalité des accroissements finis entre un point (fixe) **a** et un point quelconque **x** donne le résultat. cqfd

Corollaire. *Si U est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{f}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathbf{f}$ est une fonction constante sur U ;*
(ii) *pour tout $\mathbf{x} \in U$, $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est l'application nulle ;*
(iii) $\forall j \in [\![1,p]\!],\ \forall \mathbf{x} \in U,\ \mathrm{D}_j\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$;
(iv) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \forall \mathbf{x} \in U,\ \mathrm{D}_j\, f_i(\mathbf{x}) = 0$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent aux composantes f_i de $\mathbf{f}$. cqfd

8 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définitions 8.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$).

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^p$, on définit par récurrence sur k :

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbf{f} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbf{R}^n) \iff \mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n) \text{ et } \forall j \in [\![1,p]\!],\ \mathrm{D}_j\, \mathbf{f} \in \mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbf{R}^n) \tag{8.1}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathbf{f}$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Si $\mathbf{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k, $\mathbf{f}$ est dite *de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U*.

Les dérivées partielles d'ordre supérieur sont notées :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\Big) = \mathrm{D}_i(\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}) = \mathrm{D}_i \circ \mathrm{D}_j(\mathbf{f}) \tag{8.2}$$

$\mathcal{C}^k(U, \mathbf{R}^n)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ; $\mathcal{C}^k(U) = \mathcal{C}^k(U, \mathbf{R})$ est une $\mathbf{R}$-algèbre. Somme, produit, quotient (à dénominateur non nul) de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. En particulier, les polynômes, les fractions rationnelles sur leur domaine de définition (*i.e.* en dehors de l'ensemble qui annule le dénominateur) sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Théorème 8.1 (de Schwarz).

Si $\mathbf{f}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$, toutes les dérivées partielles de $\mathbf{f}$ commutent, i.e. *:*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j\, \partial x_i} \qquad \textit{soit} \qquad \mathrm{D}_i(\mathrm{D}_j\, \mathbf{f}) = \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i\, \mathbf{f}) \tag{8.3}$$

La fonction $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ prolongée en $(0,0)$ par 0 est un contre-exemple du théorème de Schwarz.