Les nombres réels

Table des matières

1 Corps des nombres réels

L'ensemble ds nombres réels est noté $\mathbf{R}$, il est communément représenté par une droite.

1.1 Opérations

L'ensemble $\mathbf{R}$ est doté deux lois de composition interne $+$ et $\times$ qui ont les propriétés suivantes :
- $+$ et $\times$ sont associatives
- $+$ et $\times$ sont commutatives
- $+$ admet un élément neutre : 0
- Chaque réel x admet un symétrique (opposé) pour $+$, noté $-x$
- $\times$ admet un élément neutre : 1
- Chaque réel **non nul** x admet un symétrique (inverse) pour $\times$, noté $\dfrac{1}{x}$
- $+$ est distributive par rapport à $\times$.

Pour cela, on dit que $(\mathbf{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.
On distingue, dans $\mathbf{R}$, les parties suivantes : $\mathbf{R}^*, \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}_-^*$.

1.2 Ordre

$\mathbf{R}$ est muni d'une **relation d'ordre** : $\leqslant$. Cette relation est **totale** ; si a et b sont deux réels, l'une des deux relations $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ est vraie[1].
Cette relation possède les propriétés suivantes :
reflexivité : $\forall a \in \mathbf{R},\ a \leqslant a$
antisymétrie : $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a \Rightarrow a = b$
transitivité : $\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
$\leqslant$ est **compatible** avec l'addition dans $\mathbf{R}$:

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4,\ a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$

[1]Comparer avec l'ordre déterminé par $\subset$ dans l'ensemble des parties d'un ensemble.

$\leqslant$ est **compatible** avec la multiplication dans $\mathbf{R}_+$:

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^{*4},\ a \leqslant b \ \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow a \times c \leqslant b \times d$$

En présence de nombres négatifs il faut alors retenir :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \forall c \in \mathbf{R}_-,\ a \leqslant b \Rightarrow b \times c \leqslant c \times a$$

2 Majorants, minorants

Définition 1 *Soit A une partie de* $\mathbf{R}$*, un majorant (resp. minorant) de A est un réel x tel que*

$$\forall a \in A,\ a \leqslant x \quad (\textit{resp. } \forall a \in A,\ x \leqslant a)$$

Lorsqu'une partie de $\mathbf{R}$ admet un majorant (resp. minorant) on dit qu'elle est *majorée* (resp. *minorée*). Si elle est majorée et minorée, elle est alors *bornée*.

Définition 2 *Soit A une partie de* $\mathbf{R}$*. Si un réel est la fois élément de A et majorant (resp. minorant) de A alors il est unique ; c'est alors le plus grand (resp. le plus petit) élément de A, on le note $Max\,(A)$ (resp. $Min\,(A)$).*

$$M = Max\,(A) \iff (M \in A) \ \textit{ et } \ (\forall a \in A,\ a \leqslant M)$$

$$m = Min\,(A) \iff (m \in A) \ \textit{ et } \ (\forall a \in A,\ m \leqslant a)$$

Définition 3 *Soit A une partie de* $\mathbf{R}$*. La* borne supérieure *(resp.* borne inférieure*) de A est, s'il existe, le plus petit (resp. le plus grand) élément de l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A ; on la note* $\mathrm{Sup}(A)$ *(resp.* $\mathrm{Inf}(A)$*).*

Les notions précédentes sont assez proches, aussi il convient de les retenir avec une grande précision pour ne pas les confondre.

Avant de citer le *grand* théorème de ce cours voici quelques propositions « immédiates » :

Propositions

1/ Si une partie de $\mathbf{R}$ admet un majorant (resp. minorant), elle en admet une infinité.

2/ Si une partie de $\mathbf{R}$ possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément), cet élément est aussi sa borne supérieure (resp. borne inférieure).

Attention à la deuxième proposition, sa réciproque est fausse en général !

Théorème 1 (fondamental) *Toute partie* non vide *et* majorée *(resp.* minorée*) de* $\mathbf{R}$ *admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).*

Ce théorème est admis dans le cadre de ce cours où l'on ne dispose pas de définition précise de ce qu'est un nombre réel. Intuitivement, il se conçoit « bien ». Son caractère fondamental vient du fait qu'il est équivalent à toutes les caractérisations de $\mathbf{R}$ misent à jour par les mathématiciens. L'un d'entre eux, **Dedekind** (1831-1916), est l'auteur de la caractérisations par les *coupures* :

> *La comparaison entre le domaine* $\mathbf{Q}$ *des nombres rationnels et une droite induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?[...] J'y ai réfléchi longtemps en vain, mais finalement j'ai trouvé ce que je cherchais. Les avis sur cette découverte seront peut-être partagés ; je crois cependant que la plupart des gens en trouveront le contenu bien trivial. Il*

> *consiste en ceci. [...] Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.*

Ah, que les mathématiques sont belles, énoncées de cette façon !

3 Valeur absolue

Définition 4 *Soit x un réel, sa partie entière, notée $|x|$ est égale à x si x est positif ($x \geqslant 0$) ou à $-x$ si x est négatif ($x \leqslant 0$).*

La valeur absolue d'un nombre mesure la *distance* de ce nombre à 0. Plus généralement $|a-b|$ est la distance qui sépare les eux nombres a et b.

Propriétés

1/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$ (séparation)

2/ $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $|a-b| = 0 \iff a = b$ (corollaire de **1**/)

3/ $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| = |x||y|$ (homogénéité)

4/ $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $||x|-|y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$ (inégalité triangulaire)

Les propriétés précédentes sont fondamentales en analyse, nous nous appuyons souvent sur elles pour démontrer les théorèmes importants.
L'inégalité triangulaire doit être retenue sous la forme *complète* présentée ici. On notera qu'il y a égalité à gauche lorsque x et y sont de signes contraires et égalité à droite quand x et y sont de même signe (demonstration en classe).

Remarques Aux propriétés ci-dessus on peut ajouter les suivantes qu'il convient de ne pas perdre de vue :

1/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $|-x| = |x|$

2/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

4 Partie entière

Définition 5 *Soit x un réel, sa* partie entière, *notée $E(x)$ est le plus grand des entiers relatifs inférieurs à x.*

$$E(x) = Max\,\{n \in \mathbf{Z},\, n \leqslant x\}$$

La partie entière d'un nombre est une *localisation* de ce nombre sur l'échelle des entiers, elle trouve son utilité lorsque l'on a à préciser un entier *voisin* d'un réel.

Propriétés

1/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $E(x) \leqslant x < E(x)+1$

2/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $x-1 < E(x) \leqslant x$

3/ $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, E(x+y) \geqslant E(x)+E(y)$

4/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $E(x+n) = E(x)+n$

5 Intervalles

Définition 6 *Soit I une partie de $\mathbf{R}$, I est un* intervalle *de $\mathbf{R}$ si, et seulement si il vérifie la propriété suivante :*

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall z \in \mathbf{R},\, x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in I$$

L'image que l'on a d'un intervalle est celle d'une partie *continue*, en un seul morceau. Cela ne suffit pas pour *définir* un intervalle et surtout cela ne constitue pas un énoncé précis, susceptible de fournir une méthode de démonstration.
La caractérisation donnée ici fait référence à la notion de *partie convexe* : une partie convexe est une partie telle que tout segment qui joint deux de ces points est contenu dans cette partie.
La définition d'un intervalle étant donnée, nous pouvons faire l'inventaire des types d'intervalles que nous rencontrerons : segment, semi-ouvert à droite, semi-ouvert à gauche, ouvert et intervalles non bornés (inventaire fait en classe).