Rappels sur les suites-Récurrence

1 Rappels (liste non exhaustive) sur les suites

Définition 1. On appelle suite numérique réelle toute fonction définie d'une partie de $\mathbb{N}$ (le plus souvent $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Remarques :
- Par abus de langage, on parle de suite au lieu de suite numérique réelle.
- La plupart des théorèmes concernant les suites sera donnée en supposant que l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$, il faudra adapter si besoin est...

1.1 Deux principales façons de construire une suite

1.1.1 Suite définie par la donnée explicite du terme de rang n

Dans ce cas, on peut calculer directement u_n à partir de n.
Exemples : (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$ ou (z_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $z_n = 2n^2 - 1$.

1.1.2 Suite définie par récurrence

Ce sont des suites pour lesquelles on dispose du premier terme (resp. des deux premiers resp. des trois premiers etc...) et d'un formule (dite de **récurrence**) qui permet de calculer un terme à partir du précédent (resp des deux précédents resp des trois précédents etc...).
Exemples :
- (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 1 + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
- La suite de Fibonnacci définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- La suite de Syracuse (1950 université américaine de Syracuse)
$\begin{cases} a = u_0 \text{ est un entier naturel non nul quelconque.} \\ \text{si } u_n \text{ est pair, alors } u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \\ \text{si} u_n \text{est impair, alors } u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

Remarques :

1.2 Représentations graphiques

Définition 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. Représenter graphiquement cette suite, c'est (comme pour une "fonction habituelle") placer, dans un repère orthogonal, tous les points de coordonnées $(n; u_n)$. On peut aussi représenter les termes de cette suite sur un axe gradué.

La représentation graphique d'une suite est donc constituée de points isolés...

Remarques : Il peut être utile de remarquer (si c'est possible) que la suite est du type $u_n = f(n)$ ou bien $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ que l'on sait étudier. (Voir exos) À ce sujet on peut retenir la propriété suivante :

Proposition 1. Lorsque f est une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (ie un intervalle du type $]a; +\infty[$ où a est un réel), l'ensemble des valeurs prises par $f(n)$ avec $n > a$ définit la suite (u_n) avec $u_n = f(n)$.

1.3 Sens de variation d'une suite

Définition 3.

– (u_n) est une suite *croissante*(respectivement *strictement croissante*), si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geqslant u_n (\text{respectivement } u_{n+1} > u_n)$$

– (u_n) est une suite *décroissante*(respectivement *strictement décroissante*), si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \leqslant u_n (\text{respectivement } u_{n+1} < u_n)$$

Théorème 1. *Si f est une fonction (dé)croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) de terme général $u_n = f(n)$ est (dé)croissante.*

Remarque : Il ne faut pas confondre...
Lorsque la suite est définie par la relation de récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$ les variations de f et celle de (u_n) ne sont pas nécessairement les mêmes (cf exos).

2 Le raisonnement par récurrence

2.1 Approche

Exercice 1

n est un entier naturel non nul. On pose

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k$$

et

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} j^3.$$

Calculez A_n et B_n pour $n \in \langle 1; 5 \rangle$. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Solution

Il semble que $A_n^2 = B_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour n entier, $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propositition "$A_n^2 = B_n$". On a vérifié que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, et $P(4)$ sont vraies, mais $P(n)$ est-elle vraie quel que soit n ? Si l'on pense que oui, comment le prouver puisque l'on peut pas effectuer une infinité de vérifications ? Il semble difficile de le prouver "directement" pour un n quelconque..., nous allons utiliser un nouveau type de raisonnement (propre aux entiers naturels) : le raisonnement par récurrence.
L'idée de ce raisonnement peut être imagée ainsi : **si** l'on peut d'abord se placer sur un barreau d'une échelle, **et si** l'on peut ensuite passer d'un barreau quelconque à son suivant, **alors** on peut gravir tous les autres barreaux de l'échelle.
Ici démontrons que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose $P(n)$ vraie.
Il s'agit sous cette hypothèse de démontrer que $A_{n+1}^2 = B_{n+1}$ ie $(1+2+...+n+1)^2 = 1^3+2^3+...+(n+1)^3$.
Pour utiliser cette hypothèse, on écrit :

$$\begin{aligned}(1+2+...+n+1)^2 &= (1+2+...+n+n+1)^2 \\ &= (1+2+...+n)^2 + 2(1+2+...+n)(n+1) + (n+1)^2 \\ &= 1^3+2^3+...+n^3 + 2(1+2+...+n)(n+1) + (n+1)^2\end{aligned}$$

Mais, d'après le cours de premièreS, $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donc

$$\begin{aligned}(1+2+...+n+1)^2 &= 1^3+2^3+...+n^3 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= 1^3+2^3+...+n^3 + (n+1)^3.\end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$ est vraie.

Dès lors, puisque $P(1)$ est vraie alors $P(2)$ est vraie, alors $P(3)$ est vraie, alors $P(4)$ est vraie et ainsi de suite....
On peut alors conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Le principe du raisonnement

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou ègal à un entier naturel m, on procède en trois grandes étapes :

- **Première étape (initialisation) :** on vérifie que $P(m)$ est vraie.
- **Deuxième étape (hérédité) :** on suppose que pour un entier naturel $n \geqslant m$, $P(n)$ est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition $P(n+1)$ est vraie.
- **Troisième étape (Conclusion) :** On conclut, en application du principe de récurrence, que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant m$

Remarques :

- Lorsque l'on veut prouver qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à un entier naturel donné m, et que l'on ne dispose pas de méthode , on peut envisager un raisonnement par récurrence.
- La récurrence est une **induction** : de la vérification de cas particuliers on infére qu'une propriété est vraie en général, ce qui s'oppose à une **déduction** : du cas général on infére les cas particuliers. Comme il est souvent faux de passer des cas particuliers au cas général, la récurrence, outil subtil et efficace, doit être conduite avec rigueur : en respectant les étapes du raisonnement, pour éviter les pièges que l'induction peut présenter.
  Ce raisonnement contient, condensés en une formulation unique, une infinité de syllogisme
- Le principe du raisonnement par récurrence est un axiome (ceux de Péano Giuseppe, italien $1858 - 1932$) de la construction des entiers naturels.

3 Quelques exemples

Exercice 2

Démontrez que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Conjecturez un majorant non trivial de (u_n). Démontrez alors votre conjecture.

2. Étudiez la monotonie de (u_n).

Exercice 4

Démontrez que si f est une fonction définie sur un intervalle I, tel que $f(I) \subset I$, on peut définir une suite (u_n) par la donnée de u_0, $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 5

45 page 21

Exercice 6

43 page 21

4 Limites de suites

4.1 Convergence d'une suite

Étudier la convergence d'une suite numérique (u_n), c'est s'intéresser à la question suivante :
"lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, les nombres u_n finissent-ils par s'accumuler autour d'un nombre fixe l ?"
Précisons cette notion "d'accumulation".

4.1.1 Exemple

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Les termes de cette suite sont $1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{10}; -\frac{1}{11}; \ldots; \frac{1}{10^{100}}; \ldots; -\frac{1}{9^{333}}; \ldots$

Intuitivement on peut alors préssentir que les termes de cette suite finissent, lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, par s'accumuler autour de zéro. Plus précisément, les termes finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]0-\alpha; 0+\alpha[$ aussi petit que soit α ($\alpha > 0$).

En effet dire que $u_n \in I$ équivaut à dire que $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \alpha$ ce qui équivaut à $n > \dfrac{1}{\alpha}$.

Ces intervalles ouverts centrés en "zéro" fonctionnent en quelque sorte comme des "pièges" pour les termes de la suite : ils les contiennent tous à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite est **convergente et qu'elle converge vers zéro** ou bien qu'elle a pour limite zéro. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4.1.2 Cas général

Définition 4. Dire qu'une suite (u_n) converge vers un réel l (ou qu'elle a pour limite l) signifie que tout intervalle ouvert centré en l : $]l-\alpha; l+\alpha[$, (quel que soit $\alpha > 0$), contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-\alpha; l+\alpha[$. On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Remarques :

- L'énoncé suivant est équivalent à la définition précédente :
  "Dire qu'une suite (u_n) converge vers un réel l (ou qu'elle a pour limite l) signifie que tout intervalle $]l-\alpha; l+\alpha[$, (quel que soit $\alpha > 0$), contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux".
- Lorsque qu'une suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge ou bien qu'elle est divergente.
- Une limite, lorsqu'elle existe est unique. (détaillé en cours)
  Raisonnons par l'absurde : Supposons, qu'une suite (u_n) converge vers deux limites distinctes l_1 et l_2. Comme $l_1 \neq l_2$, il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2 respectivement centrés en l_1 et l_2 tels que $I_1 \cup I_2 = \emptyset$. Par définition de la convergence, il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes se trouvent dans I_1 et un autre n_2 à partir duquel tous les termes se trouvent dans I_2. En prenant $m = max\{n_1; n_2\}$ on aurait alors tous les termes dans $I_1 \cup I_2$. Ce qui est absurde car $I_1 \cup I_2 = \emptyset$
- Certaines suites n'ont pas de limite : par exemple, (u_n) définie par $u_n = (-1)^n \ldots$

4.2 Limite infinie

Intuitivement, dire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$), signifie que les termes u_n deviennent de plus en plus grands, plus précisément :

Définition 5. Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$), signifie que les termes u_n finissent par être supérieurs à n'importe quel réel M, c'est-à-dire que tout intervalle $[M; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4.3 Théorèmes sur les limites

L'utilisation de la définition pour démontrer une convergence est difficile mais on dispose de théorèmes permettant, à partir de limites connues, de déduire d'autres limites. Il ne faut pas pour autant croire que la définition ne sert à rien : elle justifie tous les théorèmes qui suivent.

4.3.1 Suites définies explicitement

Théorème 2. *(admis)*
f est une fonction définie sur un intervalle du type $]a; +\infty[$ (autrement dit sur un voisinage de $+\infty$) et (u_n) est la suite définie par $u_n = f(n)$. l désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$$\textit{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = l, \textit{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Exemple : Déterminez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{2n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+1)\sqrt{\dfrac{1}{n}}$

Remarque : Des limites de référence sont à connaître. Par exemple (a est réel et p un entier naturel supérieur à 2) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^p} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} n^p = +\infty \qquad \ldots$$

4.3.2 Opérations sur les limites

Les théorèmes énoncés sur la limite en $+\infty$ d'une **somme**, d'un **produit** ou d'un **quotient** de deux fonctions restent valables pour les suites numériques réelles. Citons pour rappel les **quatre cas d'indétermination** :

$$"\infty - \infty" \quad ; \quad "0 \times \infty" \quad ; \quad "\frac{0}{0}" \quad ; \quad "\frac{\infty}{\infty}"$$

Exemple : Déterminez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{2}{2n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} + 3n^3$

4.4 Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique telle que u_0 est défini. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ où q est la raison de la suite. D'après les théorèmes sur les limites il suffit alors d'étudier le comportement de la suite géométrique $n \longmapsto q^n$ pour connaître celui de (u_n).

Théorème 3. *(admis) On distingue deux cas :*

1. *Lorsque* $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
   (Une petite application de l'inégalité de Bernouilli)
2. *Lorsque* $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Remarque : Si $q < -1$ alors la suite n'a pas limite… mais chut ! c'est pour plus tard !

Application : Calculez $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$