Quelques exercices d'approfondissement

Nicolas Roux

27 décembre 2005

Table des matières

1 Résolution d'équations du type ax^2+bx+c (avec $a\neq 0$)

On sait factoriser les expressions du type ax^2+bx+c (avec $a\neq 0$) dans certaines conditions.
Il existe d'autres méthodes (plus complètes) pour déterminer si une expression de ce type est factorisable et pour la factoriser le cas échéant. On va déterminer cette méthode.

1. Montrer que $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$ (1).
   (On pourra développer puis réduire l'expression de droite pour arriver à l'expression de gauche.)
2. • On sait factoriser les expressions du type A^2-B^2.
   • On sait aussi qui si un nombre n est positif alors on peut l'écrire comme le carré d'un nombre : $(\sqrt{n})^2=n$; alors que si n est négatif on ne le peut pas.
   Dans la deuxième expression de l'égalité (1), il faut s'intéresser à la partie $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.
3. Si $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)<0$ alors on ne peut pas l'écrire comme étant le carré d'un nombre, on ne sait pas factoriser l'expression dans ce cas.
4. Par contre, si $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)>0$, alors $\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=\left[\sqrt{\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right]^2$.
5. Ce cas est intéressant car, en posant :
   $A=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ et $B=\sqrt{\left(\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$, l'expression de droite de l'égalité (1) devient $a(A^2-B^2)$!
   $$a(A^2-B^2)=a(A-B)(A+B)$$
6. Tout suivi ? Alors on peut appliquer la méthode.

   <u>Exemple 1 :</u> Factoriser, si possible, x^2-3x+2.

   • $a=1$, $b=-3$ et $c=2$. (Il faut calculer $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$, pour déterminer le signe de $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.)
   $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=\dfrac{(-3)^2-4(1)(2)}{4(1)^2}=\dfrac{9-8}{4}=\dfrac{1}{4}>0$, on peut donc factoriser cette expression.

- $A = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right) = \left(x + \dfrac{-3}{2 \times 1}\right) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ et $B = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$
- $x^2 - 3x + 2 = 1\left[\left(x - \dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\right]\left[\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right]$
$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \dfrac{4}{2}\right)\left(x - \dfrac{2}{2}\right)$
$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$

Exemple 2 : Factoriser, si possible, $x^2 - x + 2$.

- $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.
- $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{(-1)^2 - 4(1)(2)}{4(1)^2} = \dfrac{1-8}{4} = \dfrac{-7}{4} < 0$, on ne peut pas factoriser cette expression (d'après 3.).

7. Factoriser, si possible, $4x^2 - 4x - 3$.
8. Factoriser, si possible, $x^2 - 2x - 2$.
9. Factoriser, si possible, $3x^2 - 4x + 2$.

2 Initiation aux fractales

Voyez vous un quelconque rapport entre un chou fleur, les côtes de Bretagne, la surface de la lune ou les cours de la bourse ? Difficile ?

Partie 1

Tous ces objets sont pourtant utilisés par des mathématiciens pour étudier et expliquer des courbes ou des surfaces étranges appelées fractales.
1. Rechercher le mot *fractale* dans une encyclopédie ou un dictionnaire et par la même occasion établir une biographie succincte sur un mathématicien célèbre : Benoît Mandelbrot, le père de nombreuses fractales.
2. Au CDI, vous pourrez, sur Internet, afficher de belles fractales en couleur. Là encore, il faudra chercher un peu. (Joindre au devoir une copie accompagnée d'un petit texte sera très apprécié.)

Partie 2

Mais passons aux choses sérieuses avec cette petite introduction modeste que nous devons à
Mr Van Koch : Le flocon de neige.

1. Sur une belle feuille de papier blanche A4, construire un segment de 162 mm. Le partager en trois segments de même longueur . Le segment du milieu va vous servir maintenant de base pour construire un triangle équilatéral. Gommez ce segment qui vous a servi de base, vous avez sous vos yeux une ligne brisée de 4 segments.
Divisez de nouveau chaque segment en trois. Sur chaque segment du milieu construisez à nouveau un triangle équilatéral. Effacez tous les segments du milieu. Vous venez d'obtenir une "courbe" fractale d'ordre 2. Il ne vous reste plus qu'à recommencer le même processus : diviser chaque segment en trois puis sur le petit segment du milieu construire un triangle équilatéral ... Vous aurez sous les yeux la courbe d'ordre 3. Ce serait maintenant trop long de réaliser l'étape suivante.
2. Vous avez maintenant compris le procédé. Je vous propose de recommencer la même chose en partant d'un grand triangle équilatéral de côté 162 mm et donc de faire la même construction sur chaque côté. Vous obtiendrez un magnifique flocon de neige.
3. Pour terminer, il serait intéressant de se pencher sur le périmètre de chaque courbe, à chaque stade

de son évolution. Vous pourrez le faire en complétant le petit tableau suivant :

Stade du flocon	Nombre de côtés	Longueurs d'un côté en mm	Périmètre du flocon en mm
0	3	162	486
1			
2			
3			
4 (non construit)			

Deux questions se posent alors :

1. Comment va évoluer le périmètre de la courbe du flocon de neige quand on va continuer sa construction : "à l'infini" ?
2. La surface enfermée dans cette courbe n'est pas infinie puisqu'elle ne sort pas de la feuille de papier. Mais alors peut-on calculer son aire ?
   Vous pouvez répondre à la première question. Pour la seconde, il faudra attendre quelques années. Patience...

3 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Première partie : Contraposée d'une propriété

On a déjà rencontré, dans certains cas, la contraposée d'une propriété (exemple : dans un triangle de plus grand côté $[AB]$, si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle, qui est la contraposée du théorème de Pythagore). La contraposée d'une propriété 1 est une autre propriété 2 dont les conditions sont la négation des conclusions de la propriété 1 et les conclusions sont la négation des conditions de la propriété 1.

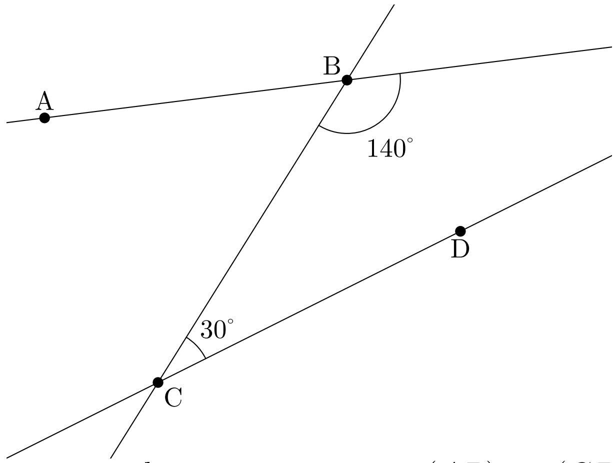
Exemple
Propriété 1 :
Si $\underbrace{\text{un nombre est divisible par dix}}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{\text{il se termine par 0}}_{\text{conclusion}}$.
Propriété 2 :
Si $\underbrace{\text{un nombre ne se termine pas par 0}}_{\text{condition}}$, alors $\underbrace{\text{il n'est pas divisible par dix}}_{\text{conclusion}}$.
Remarque
1. Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie.
2. La négation de **et** est **ou** et inversement.

Attention!!! : Ne pas confondre contraposée et réciproque.

Donner les réciproques et contraposées des propriétés suivantes, puis dire si elles sont vraies :
1. Si une propriété est vraie alors sa contraposée est vraie.
2. Si j'ai deux chemises alors j'ai au moins une chemise.
3. Si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont sécantes.

Deuxième partie : Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde est une méthode pour démontrer.



Principe :
On veut montrer que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

1. On suppose quelque chose de faux dans l'énoncé.	Dans notre exemple, on suppose que (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Au cours de la démonstration, on constate une contradiction.	(AB) et (CD) sont parallèles, donc les angles alternes internes qu'elles forment avec la droite (BC) ont même mesure, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. De plus $\widehat{ABC} = 180 - 140 = 40°$. $\widehat{BCD} = 30°$. Donc $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$.
3. S'il y a une contradiction, cela veut dire que l'énoncé est faux (ou qu'on a fait une erreur, mais ce n'est pas le sujet...).	On constate que $\widehat{ABC} \neq \widehat{BCD}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, ce qui est contradictoire, donc la supposition est fausse donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Troisième partie : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

L'irrationnalité de $\sqrt{2}$ semble avoir été découverte par les pythagoriciens (disciples de Pythagore). La démonstration proposée est très voisine de celle d'Euclide dans son ouvrage intitulé *Éléments*.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fraction **irréductible** $\frac{p}{q}$ telle que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers.

1. Expliquer pourquoi alors $p^2 = 2q^2$.
2. Montrer que si p est pair alors p^2 est pair.
3. Donner la contraposée de cette propriété.
4. Montrer que si p est impair alors p^2 est impair.
5. Donner la contraposée de cette propriété.
6. Le nombre $2q^2$ est-il pair ou impair ? Justifier que p est pair.
7. Posons $p = 2p'$.
   Expliquer pourquoi : $q^2 = 2p'^2$. En déduire que q est pair.
8. On sait que p est pair et que $\frac{p}{q}$ est irréductible. En déduire que q est impair.
9. Où est la contradiction ?
10. Conclure.

4 Nombre d'or

0. Le nombre d'or

Faire des recherches sur ce nombre (succinctes et abordables).

1. L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ (E)

1. Montrer que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de (E).
2. Calculer une valeur approchée de ϕ à 10^{-3} près.

2. Suite de Fibonacci

Première partie

La suite de nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ est une suite de nombres bien connue. C'est une suite de nombres de 1$^{\text{er}}$ terme 1, de 2$^{\text{e}}$ terme 2, etc...
Il existe bien d'autres suites de nombres, par exemple :

1. La suite de nombres $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
   Déterminer les 6$^{\text{e}}$ et 7$^{\text{e}}$ termes.
2. La suite de nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
   Déterminer les 6$^{\text{e}}$ et 7$^{\text{e}}$ termes.
3. La suite de nombres $1, 4, 7, 10, 13, \dots$
   Déterminer les 6$^{\text{e}}$ et 7$^{\text{e}}$ termes.

Deuxième partie

Parmi toutes ces suites, il y en a une un peu plus intéressante : la suite de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

1. On calcule un terme en additionnant les deux termes précédents.
   Déterminer les 10$^{\text{e}}$ et 11$^{\text{e}}$ termes.

2. Calcul des rapports de termes consécutifs (le plus grand au numérateur) :
   $\frac{1}{1} = \dots \quad \frac{2}{1} = \dots \quad \frac{3}{2} = \dots \quad \frac{5}{3} = \dots \quad \frac{8}{5} = \dots$

   Calculer ces rapports (on donnera une valeur approchée à 10^{-3} si nécessaire), puis calculer les rapports suivants (en s'arrêtant au rapport de numérateur 89).

3. Que remarque-t-on ?

3. Fraction continue

$$A = 1 + \cfrac{1}{1+1}$$

$$B = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}$$

$$C = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}$$

$$D = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}$$

$$E = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}}$$

$$F = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}}}}}$$

1. Calculer et donner les résultats sous forme de fractions irréductibles les nombres A, B, C, D, E et F (on pourra remarquer que $B = 1 + \frac{1}{A}$, $C = 1 + \frac{1}{B}$...) .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de A, B, C, D, E et F.
3. Quelle remarque peut-on faire ?

4. Racines imbriquées

$$A = \sqrt{1+\sqrt{1}}$$

$$B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

$$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$$

$$D = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$$

$$E = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}$$

$$F = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}$$

1. Calculer A, B, C, D, E et F (on pourra remarquer que $B = \sqrt{1+A}$, $C = \sqrt{1+B}$...), on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. Quelle remarque peut-on faire ?

5. Pentagone régulier

Première partie

1. Tracer un cercle de centre O, de rayon 10 cm sur une feuille blanche (de dessin).
   Tracer un rayon $[OA]$.
   Placer le point B sur le cercle tel que $\widehat{AOB} = 72^\circ$.
   De même, placer le point $C(\neq A)$ sur le cercle tel que $\widehat{BOC} = 72^\circ$.
   En utilisant le même principe, placer D et E.
   On obtient ainsi un pentagone régulier $ABCDE$ (5 côtés et 5 angles de même mesure).
2. Mesurer AC, puis CD. Calculer $\frac{AC}{CD}$ (à 10^{-3} près).
   Que remarque-t-on ?
   On supposera par la suite que $\frac{AC}{CD} = \phi \quad \left(= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ pour rappel}\right)$.

Deuxième partie

1. Calculer $\widehat{COA}$.
2. Calculer $\widehat{CAO}$. En déduire $\widehat{ACO}$.
3. Calculer $\widehat{OCD}$.

4. Soit A' le milieu de $[CD]$, montrer que le triangle $OA'C$ est rectangle en A'.
5. Calculer $\widehat{COA'}$, puis $\widehat{A'OA}$, en déduire que A, O et A' sont alignés.
6. Calculer $\widehat{ACA'}$.
7. En remarquant que $\dfrac{DC}{AC} = 2 \times \dfrac{A'C}{AC}$, calculer la valeur exacte de $\dfrac{A'C}{AC}$ (penser que $\dfrac{DC}{AC}$ est l'inverse de $\dfrac{AC}{DC}$).
8. En déduire une valeur exacte de $\cos 72^\circ$.

6. Nombre d'or dans la vie de tous les jours

Faire des recherches sur le théâtre d'Épidaure, sur les tournesols (en rapport avec la suite de Fibonacci). Trouver d'autres éléments en relation avec ce nombre.