Autour du théorème de Pythagore

François Meria

1 Généralités

1.1 Le vocabulaire du triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, il y a un vocabulaire à respecter. Une des particularités du triangle rectangle est d'avoir *toujours* un côté plus grand que les deux autres.

Comme son nom l'indique le triangle rectangle possède un angle droit, c'est-à-dire un angle de 90°. Il est généralement matérialisé par un petit carré pour marquer cet angle.

Définition 1.1. Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle mesurant 90° sont appelés les côtés de l'angle droit.

Définition 1.2. Dans un triangle rectangle, on appelle hypoténuse le côté le plus long du triangle.

Remarque 1.1. (Vocabulaire) Chez les anciens, on plaçait l'angle droit d'un triangle rectangle en haut du schéma. Le mot *hypoténuse* vient du préfixe grec *hypo* qui veut dire *sous* et du verbe grec *teinein* qui signifie tendre. Ainsi, l'hypoténuse pour les Grecs, retient les deux côtés de l'angle droit en les attrapant par en dessous.

1.2 Un peu d'histoire : Pythagore (autour de 550 av. J.-C.)

Pythagore est un grand philosophe et mathématicien de la Grèce Antique. Il est né dans la première moitié du VI^e siècle avant Jésus-Christ, dans l'île de Samos en Ionie. Pythagore s'installe à Croton en 529 avant J.-C. Dans cette ville, il fonde une école de mathématique et de philosophie et eut de nombreux adeptes. Mort aux environs de 500 avant Jésus-Christ à Metapontom, Pythagore est resté célèbre pour avoir démontré une relation dans le triangle rectangle [1] .

Le théorème dit de Pythagore était certainement connu des Babyloniens, bien avant Pythagore lui-même... Peut-être l'a-t-il, le premier, énoncé de façon plus abstraite, et non plus seulement dans des cas particuliers, même s'ils étaient très nombreux... Les Anciens Grecs avaient coutume d'attribuer à Pythagore, à tort ou à raison, tous les résultats fondamentaux de leurs mathématiques.

Le mot *théorème* [2] est construit sur deux racines grecques. La première *thea* désigne le spectacle, on la reconnaît dans *théâtre* et *théorie*. La seconde signifie *observer* ou *comtempler*. On la retrouve elle aussi dans *théorie* mais encore dans *panorama* (elle est moins claire dans *Castorama* !).
Theorema désignait à la fois la fête, la méditation et l'objet d'étude. On voit ainsi qu'au début, la pensée mathématique grecque était basée sur l'observation. La rupture fondamentale de ce peuple est de s'être ensuite soucié de justifier un résultat plutôt que de se contenter de l'établir. Le sens du mot *theorema* évolue parallèlement. Chez les Romains il signifie *proposition démontrable*. Bien sûr la notion de preuve n'était pas celle que nous connaissons de nos jours. Cependant on peut dire que le mot avait déjà pris le sens actuel.

[1] `http ://mathematiques.ac-bordeaux.fr/viemaths/hist/mthacc/pythagore.htm`

[2] les Mots & les Maths, dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique ; Bertrand Hauchecorne ; édition ellipses.

À la renaissance le souci de démonstration réapparaît en mathématiques. Le mot est repris et francisé en 1539. À cette époque, il s'oppose à *axiome* et *postulat.* [3]

1.3 Pourquoi le théorème de Pythagore ?

Le théorème de Pythagore joue un rôle important en mathématiques. Il est étudié en classe de quatrième mais, quelles sont les personnes qui ne l'ayant jamais étudié n'en ont jamais entendu parler ? Elles sont vraiment rares. Dans les souvenirs scolaires de chacun, et même si la propriété est « oubliée » (par manque de pratique sans doute), le nom de Pythagore est un des plus connus.

En ce qui nous concerne, un des intérêts de ce théorème est en particulier l'introduction de nouveaux nombres : les racines carrées des nombres positifs. Remarquons qu'au lieu de parler de la *racine carrée* d'un nombre positif, on peut également parler de *radical* d'un nombre positif, et cette expression joue un rôle majeur en mathématiques, et en algèbre en particulier. Attachons nous à présent à l'étude du *fameux* théorème de Pythagore.
Avant de donner l'énoncé du théorème de Pythagore, nous allons définir les *nouveaux nombres* qui nous seront utiles par la suite dans ce cours.

Définition 1.3. Étant donné un nombre a positif, on appelle racine carrée du nombre a ou encore radical de a le nombre positif qui, multiplié par lui même donne a. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$. Autrement dit, le nombre $\sqrt{a}$ vérifie

$$\text{si } a \geqslant 0 \text{ alors } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \text{ ou encore } \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \tag{1}$$

Remarque 1.2. On ne parle **jamais** de la racine carrée d'un nombre négatif. C'est-àdire que si $a < 0$, on ne peut pas définir le radical de a.

Propriété 1.1. De par la définition du nombre $\sqrt{a}$ si $a \geqslant 0$, on a la relation

$$\left(\sqrt{a^2}\right) = a$$

Démonstration. En effet, par définition, $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$, et donc, le nombre positif qui, multiplié par lui même donne a^2 est $\sqrt{a^2}$. Comme par ailleurs a est positif et que a multiplié par lui-même donne (évidemment) a^2, on en déduit que $\sqrt{a^2} = a$. □

2 Le théorème de Pythagore direct ou la propriété de Pythagore

2.1 Le théorème et sa démonstration

2.1.1 Énoncé du théorème

Théorème 2.1. (Pythagore) Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

Il est parfois plus utile d'avoir en notre possession une forme de ce théorème où apparaît un « exemple » de triangle rectangle. C'est la propriété suivante qui nous sert pour avoir ce renseignement.

Propriété 2.2. Si le triangle ABC est un triangle rectangle en A, alors on a

$$\boxed{BC^2 = BA^2 + AC^2} \tag{2}$$

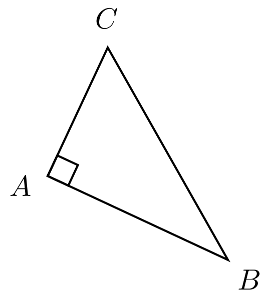

Fig. 1 – *ABC est rectangle en A* : $BC^2 = BA^2 + AC^2$

Autrement dit, si un triangle est rectangle et que ses longueurs sont les nombres a, b et c, avec c la longueur de son hypoténuse, alors

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \tag{3}$$

Remarque 2.1. Dans l'égalité $BC^2 = B\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}C^2$, on peut remarquer que l'on a en quelque sorte *inséré* le point A dans la somme formée par les côtés de l'angle droit, c.-à-d. dans le côté de l'égalité ne contenant pas l'hypoténuse du triangle ABC.

2.1.2 Démonstration du théorème

En première lecture, on pourra ne pas lire cette partie. Elle est donnée à titre d'exemple et cela pour avoir un nouvel aperçu de ce qu'est une démonstration en mathématiques, et en géométrie en particulier.

Pour démontrer le théorème de Pythagore, il y a plusieurs méthodes, géométriques notamment. Celle que nous allons exposer ici consiste en le calcul de l'aire d'un demi carré de côté inconnu. On remarque que cette question n'est pas *a priori* évidente car pour calculer l'aire d'un carré (ou d'un demi carré, ce qui revient au même), nous ne disposons que d'une formule, et celle-ci utilise le côté c de ce carré : $\mathcal{A} = c^2$.

Démonstration. On considère la figure suivante où

- ◇ les points D, A et C sont alignés ;
- ◇ on a les égalités de longueurs suivantes $\begin{cases} DA = CB \\ ED = AC \\ EA = AB \end{cases}$;
- ◇ on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$;
- ◇ les angles repérés par des marques identiques sont de même mesure.

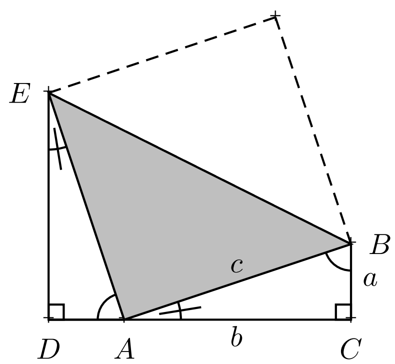

Fig. 2 – *Illustration pour la démonstration du théorème de Pythagore*

[3]Pour ceux qui sont intéressés par l'histoire, la vie de Pythagore, voir : `http ://agora.qc.ca/mot.nsf/Dossiers/Pythagore`.

Démontrons que dans le triangle rectangle ABC on a : $c^2 = a^2 + b^2$. Le triangle ABC est un triangle rectangle en C et la somme des angles d'un triangle est de 180°. Donc, la somme des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ est de 90°. Comme l'angle $\widehat{EAD}$ est égal à l'angle $\widehat{ABC}$; il vient que

$$\begin{aligned}
\widehat{EAB} &= 180° - \left(\widehat{EAD} + \widehat{BAC}\right) \\
\widehat{EAB} &= 180° - \left(\widehat{ABC} + \widehat{BAC}\right) && \text{et donc} \\
\widehat{EAB} &= 180° - 90° && \text{d'où finalement} \\
\widehat{EAB} &= 90°.
\end{aligned}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du trapèze $EDCB$ peut se calculer de deux manières différentes, et c'est cela qui est le point central de la démonstration pour obtenir une relation entre les nombres a, b et c.
D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{(\textit{grande base } + \textit{petite base}) \times \textit{hauteur}}{2} \\
\mathcal{A} &= \frac{(DE + BA) \times DA}{2}
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{(b+a) \times (a+b)}{2}} \tag{4}$$

Et, d'autre part, l'aire $\mathcal{A}$ est égal à la somme des aires des trois triangles EDA, ABC et EAB, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{DA \times DE}{2} + \frac{AC \times CB}{2} + \frac{AE \times AB}{2} \\
\mathcal{A} &= \frac{a \times b}{2} + \frac{b \times a}{2} + \frac{c \times c}{2}
\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{2 \times ab + c^2}{2}} \tag{5}$$

En développant la relation (4), on obtient [4]

$$\mathcal{A} = \frac{b \times (a+b) + a \times (a+b)}{2} = \frac{ba + b^2 + a^2 + ab}{2}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{a^2 + b^2 + 2 \times ab}{2}} \tag{6}$$

Ainsi, on peut écrire que les relations (5) et (6) sont égales, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{2 \times ab + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2 \times ab}{2}}$$

Enfin, en multipliant la dernière égalité par 2 et en soustrayant de chaque côté de cette égalité le nombre $2 \times ab$, on obtient la relation cherchée, soit

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

ce qui démontre le théorème de Pythagore. □

[4] On utilise la propriété de 5e suivante : $k \times a + k \times b = k \times (a+b)$

2.2 Applications du théorème de Pythagore

Comme nous l'avons déjà vu en classe, une des utilités à disposer du théorème de Pythagore est le calcul d'une longueur inconnue dans un triangle *rectangle* dont on connaît les longueurs des deux autres côtés. Il y en a au moins une autre qui sert à démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle. Ainsi, le premier paragraphe qui suit est destiné à rappeler les techniques pour *calculer une longueur inconnue dans un triangle rectangle* et le second paragraphe est consacré à la deuxième application : *démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.*

2.2.1 Calcul d'une longueur inconnue dans un triangle rectangle

Posons le problème. Étant donné un triangle **rectangle** dont on connaît deux longueurs sur trois, déterminons la longueur du troisième côté.

Exemple 2.1. Étant donné le triangle DEF rectangle en E et tel que $DE = 4$ cm et $FE = 3$ cm, calculons la valeur **exacte** de la longueur DF. *Voir la figure sur la page suivante.*

On sait que le triangle DEF est un triangle rectangle en E et que $DE = 4$ cm et $FE = 3$ cm. On peut utiliser la propriété de Pythagore dans ce triangle rectangle pour obtenir l'égalité

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

On remplace alors par ce que l'on connaît, soit

$$DF^2 = (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$$
$$DF^2 = 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2$$
$$DF^2 = 25\text{ cm}^2$$

On peut alors conclure que $DF = \sqrt{25\text{ cm}^2} = 5$ cm.

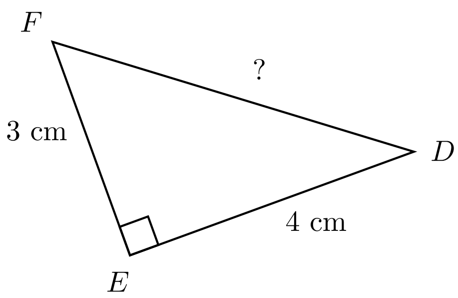

FIG. 3 – *Illustration de l'exemple*

Remarque 2.2. Dans l'égalité donnée par l'application du théorème de Pythagore de l'exemple précédent, on a effectué les calculs avec les unités de longueur et d'aire : les longueurs comme DE sont exprimées en cm et les aires comme DE^2 sont exprimées en cm^2. On peut également faire ces calculs sans les untités de longueur et d'aire et les développer en ajoutant l'unité de longueur dans la phrase de conclusion. Voici comment on procède.
On a

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

On remplace alors par ce que l'on connaît, soit

$$DF^2 = 4^2 + 3^2$$
$$DF^2 = 16 + 9$$
$$DF^2 = 25^2$$

On peut alors conclure que $DF = \sqrt{25^2} = 5$, c'est-à-dire que, la longueur DF est de 5 cm.

Remarque 2.3. Si la longueur inconnue ne se trouve pas à gauche de l'égalité mais à droite, pour pouvoir calculer le nombre inconnu, il faudra écrire une ligne supplémentaire où il faut isoler le terme inconnu. On consultera le cours pour un exemple concret.

2.2.2 Contraposée du théorème de Pythagore

La deuxième application forte du théorème de Pythagore est ce que l'on appelle « pompeusement » la contraposée du théorème de Pythagore. Ce vocabulaire vient du domaine de la logique mathématique mais ne nous est en rien utile en classe de quatrième.

Une question naturelle qui se pose après avoir étudié la propriété de Pythagore est : « *est-ce que cette propriété n'est vraie que dans un triangle rectangle ou bien, est-il possible d'avoir cette égalité dans un triangle quelconque ?* ».

Étant donné un triangle ABC dont les longueurs a, b et c ne vérifient pas la relation de Pythagore, c'est-à-dire que

$$c^2 \neq a^2 + b^2,$$

a-t-on que le triangle ABC est rectangle ?

Si le triangle ABC était rectangle, alors la relation de Pythagore (3) serait vérifiée, ce qui n'est pas le cas. On en conclut que le triangle ne peut pas être rectangle.

Remarque 2.4. Ce type de raisonnement est appelé un raisonnement par contraposition. À titre d'exemple de raisonnement par contraposition, et cela pour mieux comprendre ce que l'on fait ici, on citera le raisonnement suivant

Si mamie va faire les courses, alors elle achètera du pain. Ainsi, si en rentrant on constate qu'il n'y a pas de pain, on peut en conclure que mamie n'est pas allée faire les courses.

Voici comment il faut faire dans un exercice pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

Exemple 2.2. Considérons un triangle ABC tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Démontrons que ce triangle n'est pas rectangle.
On a

$$BC^2 = 6^2 = 36 \qquad \text{et} \qquad AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Ainsi,

$$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$$

Si le triangle ABC était rectangle en A, on aurait $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui n'est pas le cas. On en conclut que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Remarque 2.5. Dans l'utilisation de la contraposée de Pythagore, on ne cite pas la propriété utilisée (d'ailleurs on ne l'a pas donnée ici), on doit (en quatrième) refaire le raisonnement : « *si le triangle était rectangle, alors...* ».

Remarque 2.6. On a effectué les calculs des carrés des longueurs des côtés séparément car si on ne sait pas que l'égalité est vraie ou non, on n'a pas le droit d'écrire une égalité.

3 Le problème réciproque ou la réciproque de la propriété de Pythagore

3.1 Énoncé et démonstration du théorème réciproque de Pythagore

3.1.1 Énoncé du théorème

On a déjà rencontré le mot *réciproque*, ce mot est d'ailleurs courant dans le vocabulaire de tous les jours ; on dit souvent « et réciproquement »...

En mathématiques, dire que l'on utilise la réciproque d'une propriété ou une propriété réciproque, c'est que l'on considère la propriété « inverse » dans le sens où on énonce la propriété en échangeant les hypothèses et la conclusion de celle-ci. Par exemple, pour énoncer la propriété réciproque de la propriété **si** A**, alors** B, on dira **si** B**, alors** A.

Ici, la conclusion du théorème de Pythagore est que `le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit` et l'hypothèse est que `le triangle de départ est rectangle`.

Remarque 3.1. la propriété réciproque d'une propriété donnée n'est pas toujours vraie. Mais ici, par chance, la réciproque du théorème de Pythagore est vraie. Nous reviendrons sur sa démonstration au paragraphe suivant.

Voici l'énoncé de ce théorème réciproque.

Théorème 3.1. (réciproque de Pythagore) Dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est son côté le plus grand.

Comme pour le théorème de Pythagore, on peut donner le théorème réciproque à l'aide d'un exemple comme dans la propriété 3.2 suivante

Propriété 3.2. Dans un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b et c avec c la plus grande d'entre-elles, si

$$c^2 = a^2 + b^2$$

alors le triangle est un triangle rectangle.

Remarque 3.2. Si on ne sait pas qu'un triangle est rectangle, il est exclu de parler de son hypoténuse, c'est pourquoi on parle de plus grand côté du triangle dans la réciproque du théorème de Pythagore.

3.1.2 Démonstration du théorème

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème réciproque de Pythagore (théorème 3.1).

Comme pour le théorème de Pythagore direct (le théorème 2.1)*, on peut se passer en première lecture de ce paragraphe. Il constitue un autre exemple de démonstration en géométrie.*

Démonstration. Considérons un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Supposons de plus que les longueurs a, b et c vérifient la relation

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{7}$$

Construisons un deuxième triangle $A'B'C'$ tel que $A'B'C'$ soit un triangle rectangle en C' et que ses longueurs vérifient $B'C' = a$ et $A'C' = b$. Démontrons tout d'abord que le côté $A'B'$ a pour longueur c.

On sait que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en C' et que $B'C' = a$ et $A'C' = b$. On peut alors utiliser le théorème direct de Pythagore pour obtenir

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2$$

or, cette égalité s'écrit également

$$A'B'^2 = b^2 + a^2 \tag{8}$$

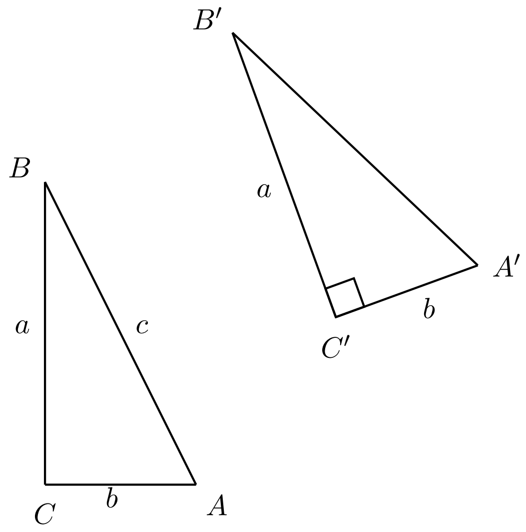

FIG. 4 – *Schéma pour la démonstration*

ce qui signifie d'après la relation (7) que $A'B'^2 = c^2$. Le nombre c étant positif, on obtient que $A'B' = c$. Ainsi, le triangle $A'B'C'$ est un triangle rectangle en C' et possède les mêmes longueurs que le triangle ABC.

À ce stade, nous avons besoin pour conclure d'un résultat qui n'est aujourd'hui étudié qu'en classe de seconde. Ce résultat sera admis.

Propriété 3.3. Si deux triangles ont des côtés qui possèdent des longueurs égales deux à deux, alors les angles qui se correspondent sont égaux.

À l'aide de cette propriété, il est alors facile de remarquer que les deux angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont égaux, et comme l'angle $\widehat{C'}$ est un angle droit, on en conclut que l'angle $\widehat{C}$ est droit, ce qui signifie que le triangle ABC du départ est un triangle rectangle en C, ce que nous voulions démontrer. □

3.2 Applications du théorème réciproque de Pythagore

Comme pour le théorème de Pythagore direct, la réciproque de ce théorème a différentes applications. Citons-en deux qui sont essentielles en classe de quatrième et encore par la suite au lycée (voire plus. . .).

3.2.1 Première application

La première application du théorème réciproque de Pythagore est qu'il sert à démontrer qu'un triangle est rectangle.

Exemple 3.1. Étant donné un triangle FGH dont les longueurs des côtés sont $FG = 5$, $GH = 12$ et $FH = 13$, alors on a

$$FH^2 = 13^2 = 169 \;\Big|\; FG^2 + GH^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Ainsi, on a

$$FH^2 = FG^2 + GH^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en conclut que le triangle FGH est rectangle en G.

Remarque 3.3. Comme dans l'utilisation du raisonnement par contraposition, on doit écrire les calculs des carrés des longueurs des côtés du triangle séparément pour la même raison : on ne peut pas écrire une égalité si on ne sait pas qu'elle est vraie avant de l'écrire.

3.2.2 Deuxième application

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, ce théorème permet de démontrer qu'un triangle est rectangle connaissant les longueurs de ses trois côtés. Qui dit triangle rectangle, dit droites *perpendiculaires*, et il est donc naturel d'utiliser, lorsque les données de l'énoncé d'un exercice le permettent, la réciproque du théorème de Pythagore pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires. Cela constitue notre deuxième application.

Exemple 3.2. Considérons la figure suivante où les segments $[BC]$, $[DB]$ et $[DC]$ mesurent respectivement 10, 24 et 26. Démontrer que les droites (BD) et (BC) sont perpendiculaires.

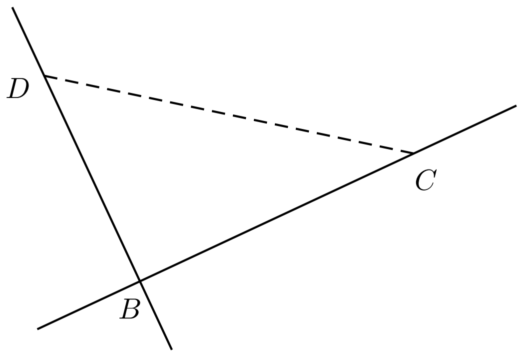

FIG. 5 – *Illustration de la* 2e *application*

On sait que $BC = 10$ cm, $DB = 24$ cm et $DC = 26$ cm. On a

$$DC^2 = 26^2 = 676 \quad \left| \quad \begin{array}{rcl} DB^2 + BC^2 & = & 24^2 + 10^2 \\ & = & 576 + 25 \\ & = & 676 \end{array} \right.$$

On a alors $DC^2 = DB^2 + BC^2$, et donc on peut conclure d'après le théorème réciproque de Pythagore que le triangle DCB est un triangle rectangle en B. Enfin, le triangle DCB étant rectangle en B, l'angle $\widehat{DBC}$ est un angle droit, c.-à-d. que les droites (DB) et (BC) sont perpendiculaires.