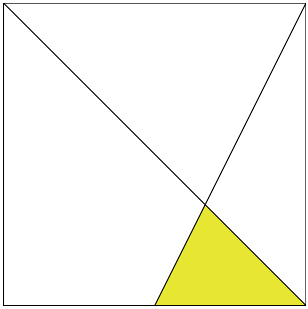
Calculs sur les aires

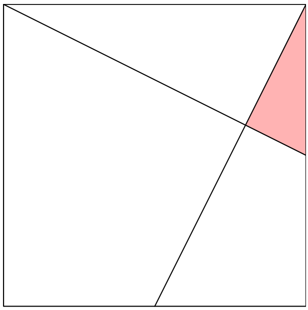
d'après Les Malices du Kangourou

Toutes les aires à calculer dans cette série d'exercices sont basées sur un carré de côté 1. Notons $\mathcal{B}$ son aire. *Remarquez que toutes les extrémités des segments sont les milieux des côtés ou les sommets du carré.*

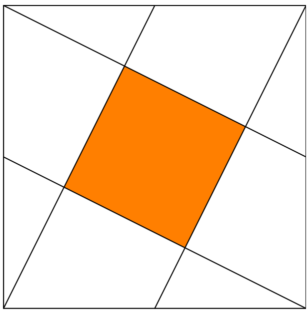
1/



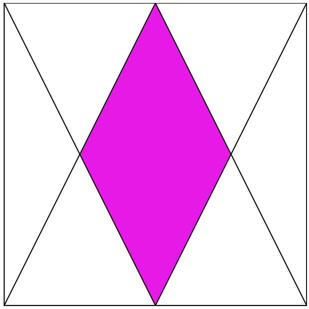
2/



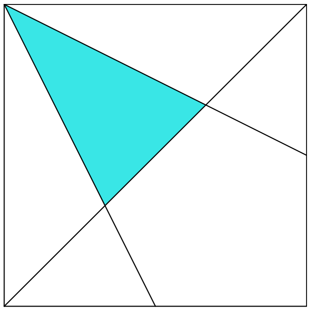
3/



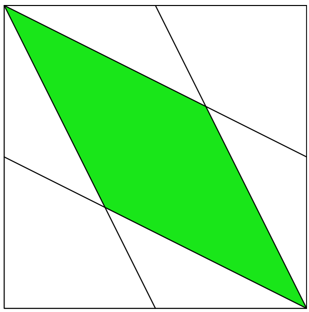
4/



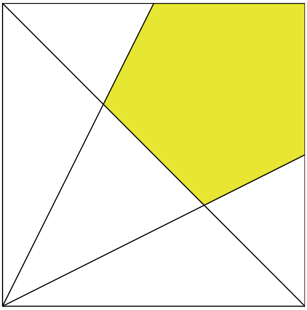
5/



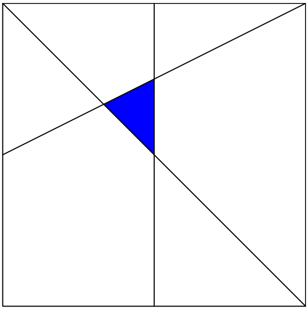
6/



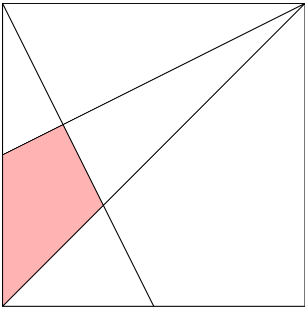
7/



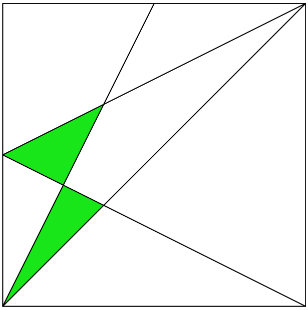
11/



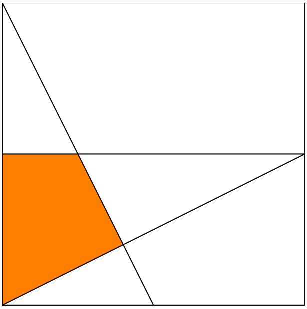
8/



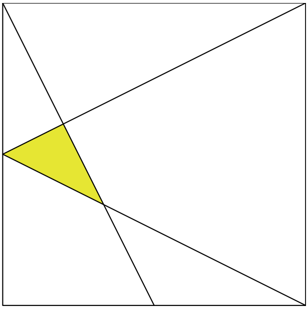
12/



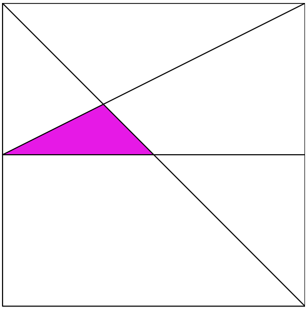
9/



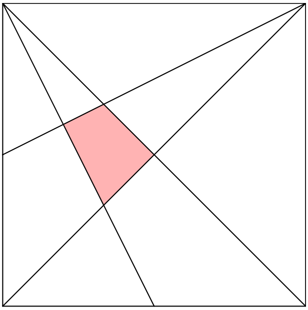
13/



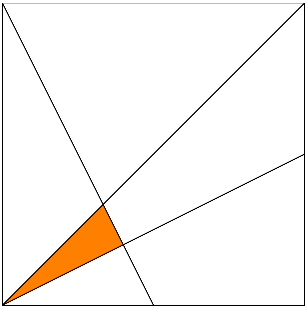
10/



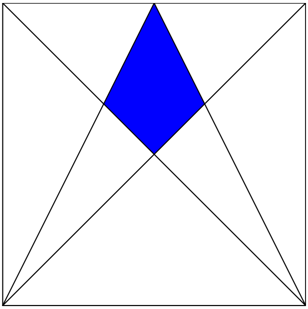
14/



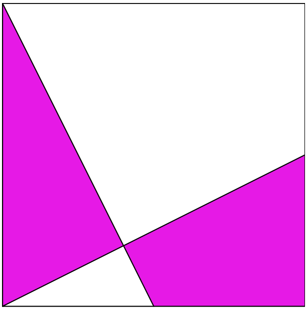
15/



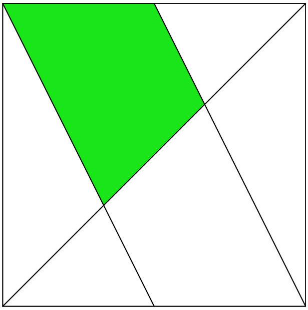
17/



16/



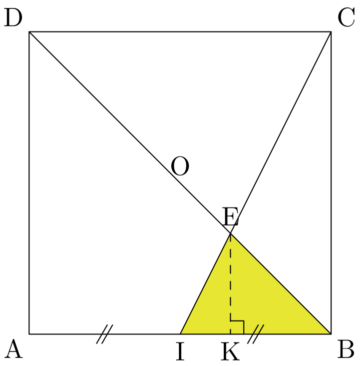
18/



Classe de 4^{e}

- Dans le triangle ABC, les droites (CI) et (BO) sont des médianes. Donc E est le centre de gravité du triangle ABC et $IE = \dfrac{1}{3}IC$.
- Les droites (EK) et (CB) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB) donc les droites (EK) et (CB) sont parallèles.
- Dans le triangle IBC, K est un point du segment $[IB]$ et E est un point du segment $[IC]$ tels que les droites (EK) et (BC) soient parallèles. « L'égalité des 3 rapports » permet d'écrire

$$\frac{IE}{IC} = \frac{IK}{IB} = \frac{EK}{CB} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{3} = \frac{EK}{CB}$$



- D'où

$$\mathcal{A}_{IBE} = \frac{EK \times IB}{2}$$

$$\mathcal{A}_{IBE} = \frac{\frac{1}{3}AB \times \frac{1}{2}AB}{2}$$

$$\mathcal{A}_{IBE} = \frac{1}{12}AB^2$$

$$\mathcal{A}_{IBE} = \frac{1}{12}\mathcal{A}_{ABCD}$$

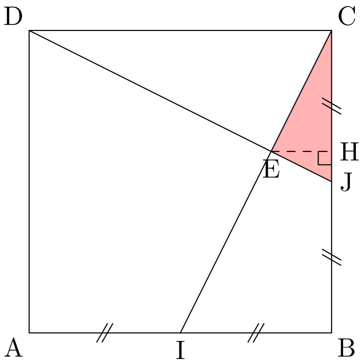
$$\mathcal{A}_{IBE} = \frac{1}{12}\mathcal{B}$$

Classe de 3e

- Dans le triangle EHC, rectangle en H, on a
$$\tan \widehat{ECH} = \frac{EH}{HC}$$
Dans le triangle ICB, rectangle en B, on a
$$\tan \widehat{ECH} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}$$
D'où
$$\frac{EH}{HC} = \frac{1}{2} \text{ ou } HC = 2 \times EH$$

- Dans le triangle EHJ, rectangle en H, on a
$$\tan \widehat{EJH} = \frac{EH}{JH}$$
Dans le triangle CDJ, rectangle en C, on a
$$\tan \widehat{EJH} = \frac{DC}{CJ} = 2$$
D'où
$$\frac{EH}{JH} = 2 \text{ ou } EH = 2 \times JH$$

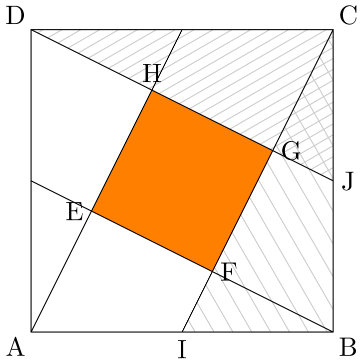
- On a alors
$$JC = JH + HC = JH + 4 \times JH = 5 \times JH \quad \text{d'où} \quad \frac{JH}{JC} = \frac{1}{5}$$



- Les droites (EH) et (CD) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (CB) donc les droites (EH) et (CD) sont parallèles.
- Dans le triangle CDJ, E est un point de la droite (JD) et H est un point de la droite (JC) tels que les droites (EH) et (CD) soient parallèles. Le théorème de Thalès permet d'écrire
$$\frac{JE}{JD} = \frac{JH}{JC} = \frac{EH}{CD} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{5} = \frac{EH}{CD}$$

- On a alors
$$\mathcal{A}_{ECJ} = \frac{JC \times EH}{2} = \frac{\frac{1}{2}BC \times \frac{1}{5}BC}{2} = \frac{1}{20}BC^2 = \frac{1}{20}\mathcal{B}$$

Classe de 4^{e}



- Pour expliquer le raisonnement, évaluons l'aire du pentagone $DGIBC$. Elle est composée des deux triangles rectangles identiques DCJ et CIB en partie superposés. Mais le triangle rectangle CGJ est compté deux fois[1] : une première fois dans le triangle rectangle DCJ, une deuxième fois dans le triangle rectangle CIB. On a donc comptabilisé ce triangle rectangle une fois de trop. C'est pourquoi on obtient

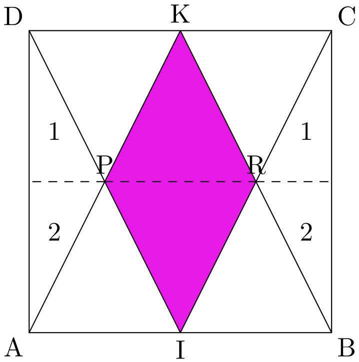
$$\mathcal{A}_{DGIBC} = \mathcal{A}_{DCJ} + \mathcal{A}_{BCI} - \mathcal{A}_{GCJ}$$

- En recommençant ce raisonnement, on obtient

$$\mathcal{A}_{EFGH} = \mathcal{A}_{ABCD} - 4 \times \mathcal{A}_{IBC} + 4 \times \mathcal{A}_{CGJ}$$
$$\mathcal{A}_{EFGH} = \mathcal{B} - 4 \times \frac{1}{4}\mathcal{B} + 4 \times \frac{1}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{EFGH} = \mathcal{B} - \mathcal{B} + \frac{4}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{EFGH} = \frac{4}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{EFGH} = \frac{1}{5}\mathcal{B}$$

[1] Le triangle CGJ est hachuré deux fois et son aire est $\frac{1}{20}\mathcal{B}$.

Classe de 6^e



Il s'agit ici d'un classique découpage. Chaque triangle composant la surface colorée représente $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré.
Par conséquent,

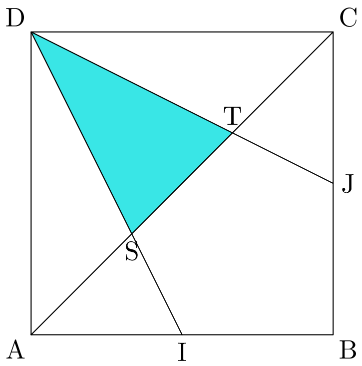
$$\mathcal{A} = 2 \times \frac{1}{8}\mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\mathcal{B}$$

Classe de 4e

- On décompose le triangle DAC en 3 parties : le triangle DAS, le triangle DTC et le triangle DST dont on cherche l'aire. On a donc

$$\mathcal{A}_{DAC} = \mathcal{A}_{DAS} + \mathcal{A}_{DTC} + \mathcal{A}_{DTS}$$



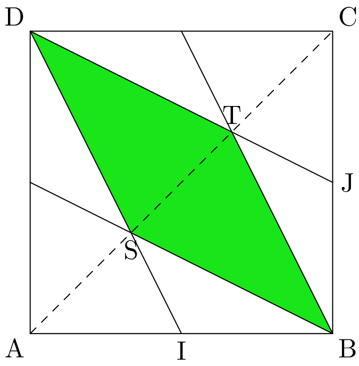
- Calculons l'aire du triangle DAS.
  On peut décomposer le triangle DAI (dont on connaît l'aire) en somme du triangle ASI (dont on connaît l'aire[2]) et du triangle DAS.
  On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{DAI} &= \mathcal{A}_{DAS} + \mathcal{A}_{ASI}\\ \frac{1}{4}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_{DAS} + \frac{1}{12}\mathcal{B}\\ \frac{1}{4}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_{DAS}\\ \frac{1}{6}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_{DAS}\end{aligned}$$

- Le triangle DTC a la même aire que le triangle DAS donc on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{DAC} &= \mathcal{A}_{DAS} + \mathcal{A}_{DTC} + \mathcal{A}_{DTS}\\ \frac{1}{2}\mathcal{B} &= 2 \times \frac{1}{6}\mathcal{B} + \mathcal{A}_{DTS}\\ \frac{1}{2}\mathcal{B} &= \frac{2}{6}\mathcal{B} + \mathcal{A}_{DTS}\\ \frac{1}{2}\mathcal{B} - \frac{2}{6}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_{DTS}\\ \frac{1}{6}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_{DTS}\end{aligned}$$

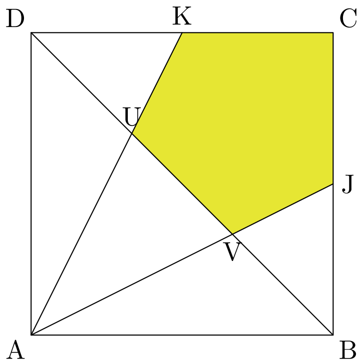
[2] Depuis le calcul n°1.



Il est facile de voir que cett aire est le double de la précédente donc

$$\mathcal{A}_{DSBT} = 2 \times \mathcal{A}_{DST}$$
$$\mathcal{A}_{DSBT} = \frac{1}{3}\mathcal{B}$$

Classe de 4^e^

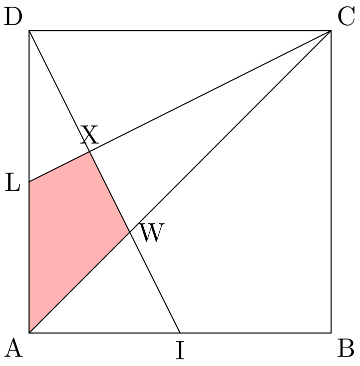


On décompose le triangle BDC en 3 parties : les triangles DUK et BVJ[3] et le pentagone $CKUVJ$. On a donc

$$\mathcal{A}_{CKUVJ} = \mathcal{A}_{BCD} - 2 \times \mathcal{A}_{DKU}$$
$$\mathcal{A}_{CKUVJ} = \frac{1}{2}\mathcal{B} - 2 \times \frac{1}{12}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{CKUVJ} = \frac{1}{2}\mathcal{B} - \frac{1}{6}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{CKUVJ} = \frac{1}{3}\mathcal{B}$$

[3]Ils sont « identiques » et on connaît leur aire depuis le n°1.

Classe de 4e



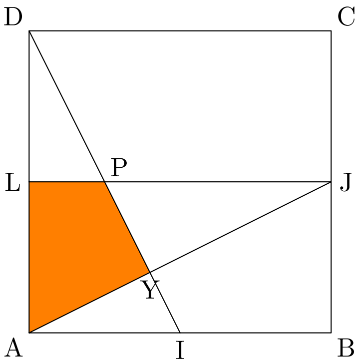
Ici encore, il s'agit d'un découpage « classique » qui permet d'obtenir la solution. En effet, le triangle ADI est composé de trois pièces : les triangles DLX et AWI[4] et le quadrilatère $ALXW$. On peut alors écrire

$$\mathcal{A}_{ALXW} = \mathcal{A}_{ADI} - \mathcal{A}_{DLX} - \mathcal{A}_{AWI}$$
$$\mathcal{A}_{ALXW} = \frac{1}{4}\mathcal{B} - \frac{1}{20}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{ALXW} = \frac{15}{60}\mathcal{B} - \frac{3}{60}\mathcal{B} - \frac{5}{60}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{ALXW} = \frac{7}{60}\mathcal{B}$$

[4]dont on connaît les aires depuis les n°1 et n°2.

Classe de 4e

- Le triangle ADI se décompose cette fois-ci en un triangle AYI[5], un triangle DLP et un quadrilatère $AYPL$.
- Dans le triangle ADI, L est le milieu du segment $[AD]$ et les droites (LP) et (AI) sont parallèles. Donc P est le milieu du segment $[DI]$ et $LP = \dfrac{1}{2}AI = \dfrac{1}{4}AD$.



- On a donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{DLP} &= \frac{LP \times DL}{2}\\
\mathcal{A}_{DLP} &= \frac{\frac{1}{4}AD \times \frac{1}{2}AD}{2}\\
\mathcal{A}_{DLP} &= \frac{\frac{1}{8}AD^2}{2}\\
\mathcal{A}_{DLP} &= \frac{1}{16}AD^2\\
\mathcal{A}_{DLP} &= \frac{1}{16}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

- L'aire du polygone $ALPY$ est donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ALPY} &= \mathcal{A}_{ADI} - \mathcal{A}_{AYI} - \mathcal{A}_{DLP}\\
\mathcal{A}_{ALPY} &= \frac{1}{4}\mathcal{B} - \frac{1}{20}\mathcal{B} - \frac{1}{16}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{ALPY} &= \frac{20}{80}\mathcal{B} - \frac{4}{80}\mathcal{B} - \frac{5}{80}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{ALPY} &= \frac{11}{80}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

[5]Dont on connaît l'aire depuis le n°2.

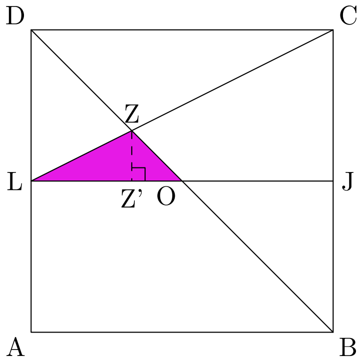
Classe de 4e

- Dans le triangle ACD, les droites (DO) et (CL) sont des médianes. Donc leur point d'intersection Z est le centre de gravité du triangle ADC.
  On a alors

$$OZ = \frac{1}{3}OD$$

- Les droites (ZZ') et (DL) sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (OL) donc les droites (ZZ') et (DL) sont parallèles.
- Dans le triangle OLD, Z est un point du segment $[OD]$, Z' est un point du segment $[OL]$ tels que les droites (ZZ') et (DL) soient parallèles.« L'égalité des 3 rapports » permet d'écrire

$$\frac{OZ'}{OL} = \frac{OZ}{OD} = \frac{ZZ'}{DL} \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{3} = \frac{ZZ'}{DL}$$



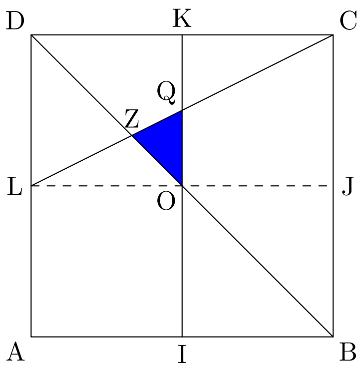
- On obtient

$$\mathcal{A}_{ZOL} = \frac{OL \times ZZ'}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ZOL} = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{3} \times DL}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ZOL} = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}AD}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ZOL} = \frac{\frac{1}{12}AB \times AD}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ZOL} = \frac{1}{24}AB \times AD$$
$$\mathcal{A}_{ZOL} = \frac{1}{24}\mathcal{B}$$

Classe de 4e

- Le triangle LQO se décompose en deux triangles : le triangle OZL[6] et le triangle QZO.
- Dans le triangle JLC, O est le milieu du segment $[JL]$ et les droites (QO) et (CJ) sont parallèles. Donc le point Q est le milieu du segment $[CL]$ et

$$QO = \frac{1}{2}CJ = \frac{1}{4}BC$$



- On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{LQO} &= \mathcal{A}_{QZO} + \mathcal{A}_{OZL} \\
\frac{QO \times OL}{2} &= \mathcal{A}_{QZO} + \frac{1}{24}\mathcal{B} \\
\frac{\frac{1}{4}BC \times \frac{1}{2}AB}{2} &= \mathcal{A}_{QZO} + \frac{1}{24}\mathcal{B} \\
\frac{1}{16}BC \times AB &= \mathcal{A}_{QZO} + \frac{1}{24}\mathcal{B} \\
\frac{1}{16}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_{QZO} + \frac{1}{24}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{QZO} &= \frac{1}{16}\mathcal{B} - \frac{1}{24}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{QZO} &= \frac{3}{48}\mathcal{B} - \frac{2}{48}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{QZO} &= \frac{1}{48}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

[6]Dont on connaît l'aire depuis le n°10.

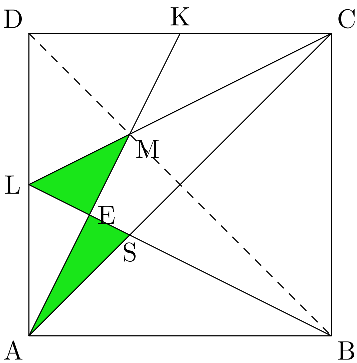
Classe de 4e

- Cette surface se compose des deux surfaces triangulaires MLE et EAS.
- Calcul de l'aire de la surface EAS.
  On décompose le triangle SLA en deux triangles EAS et ELA[7]. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{EAS} &= \mathcal{A}_{SLA} - \mathcal{A}_{ELA}\\
\mathcal{A}_{EAS} &= \frac{1}{12}\mathcal{B} - \frac{1}{20}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{EAS} &= \frac{5}{60}\mathcal{B} - \frac{3}{60}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{EAS} &= \frac{2}{60}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{EAS} &= \frac{1}{30}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

- Calcul de l'aire de la surface MLE.
  On décompose le triangle DKA en 4 triangles : DMK et DML[8], MLE, ELA[9]. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{MLE} &= \mathcal{A}_{ADK} - \mathcal{A}_{DMK} - \mathcal{A}_{DML} - \mathcal{A}_{ELA}\\
\mathcal{A}_{MLE} &= \frac{1}{4}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B} - \frac{1}{20}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{MLE} &= \frac{15}{60}\mathcal{B} - \frac{5}{60}\mathcal{B} - \frac{5}{60}\mathcal{B} - \frac{3}{60}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{MLE} &= \frac{2}{60}\mathcal{B}\\
\mathcal{A}_{MLE} &= \frac{1}{30}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

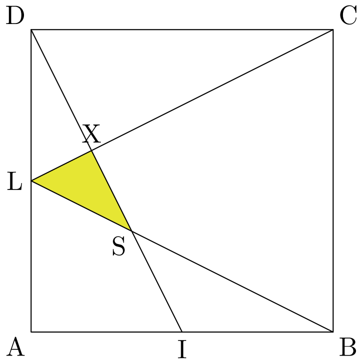


- L'aire recherchée est

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{A}_{MLE} + \mathcal{A}_{EAS}\\
\mathcal{A} &= \frac{1}{30}\mathcal{B} + \frac{1}{30}\mathcal{B}\\
\mathcal{A} &= \frac{2}{30}\mathcal{B}\\
\mathcal{A} &= \frac{1}{15}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

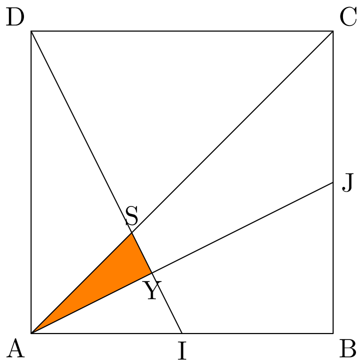
[7] Dont on connaît les aires depuis les calculs n°1 et n°2
[8] Ils sont « indentiques »
[9] Leurs aires est connues

Classe de 4e



- On remarque que le triangle LXS est superposable au triangle LEM du calcul n°12. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_{LXS} = \mathcal{A}_{LEM}$$
$$\mathcal{A}_{LXS} = \frac{1}{30}\mathcal{B}$$



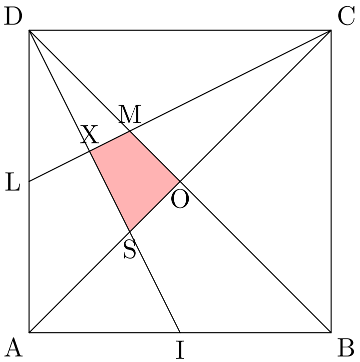
- On remarque que le triangle ASY est superposable au triangle AES du calcul n°12. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_{ASY} = \mathcal{A}_{AES}$$
$$\mathcal{A}_{ASY} = \frac{1}{30}\mathcal{B}$$

Classe de 4e

- Le triangle OAD peut se décomposer en 3 polygones : le triangle LMD[10], les quadrilatères $LXSA$[11] et $SOMX$.
  On peut donc écrire

$$\mathcal{A}_{OAD} = \mathcal{A}_{LMD} + \mathcal{A}_{LXSA} + \mathcal{A}_{SOMX}$$

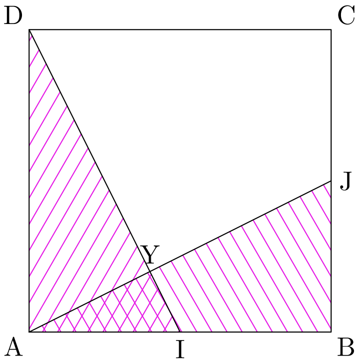


- Finalement,

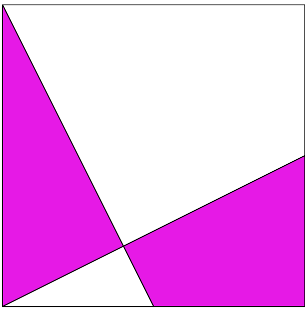
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{AOD} &= \mathcal{A}_{LMD} + \mathcal{A}_{LXSA} + \mathcal{A}_{SOMX} \\
\frac{1}{4}\mathcal{B} &= \frac{1}{12}\mathcal{B} + \frac{7}{60}\mathcal{B} + \mathcal{A}_{SOMX} \\
\mathcal{A}_{SOMX} &= \frac{1}{4}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B} - \frac{7}{60}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{SOMX} &= \frac{15}{60}\mathcal{B} - \frac{5}{60}\mathcal{B} - \frac{7}{60}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{SOMX} &= \frac{3}{60}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{SOMX} &= \frac{1}{20}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

[10] Dont l'aire est connue depuis le calcul n°1
[11] Dont l'aire est connue depuis le calcul n°8

Classe de 4e



- On utilise le même raisonnement que pour le calcul n°3. On hachure les triangles ADI et AJB et on s'aperçoit que le triangle AYI[12] intervient deux fois alors qu'il ne faut pas le compter.



- Donc l'aire recherchée est

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ADI} + \mathcal{A}_{AJB} - 2 \times \mathcal{A}_{AYI}$$
$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\mathcal{B} + \frac{1}{4}\mathcal{B} - 2 \times \frac{1}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{B} - \frac{2}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A} = \frac{10}{20}\mathcal{B} - \frac{2}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A} = \frac{8}{20}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A} = \frac{2}{5}\mathcal{B}$$

[12] Ce triangle a une aire connue depuis le calcul n°2.

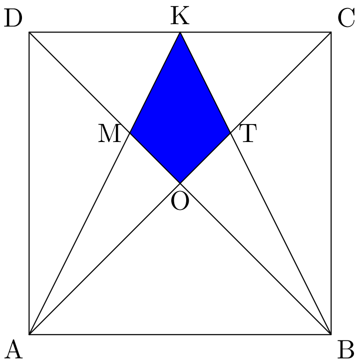
Classe de 4e

- Nous découpons le triangle DOC en trois polygones : 2 triangles DMK et KTC et 1 quadrilatère $KMOT$. On a donc

$$\mathcal{A}_{DOC} = \mathcal{A}_{DMK} + \mathcal{A}_{KTC} + \mathcal{A}_{KMOT}$$

- Comme les triangles DMK et KTC ont la même aire[13] alors

$$\mathcal{A}_{DMK} = \mathcal{A}_{KTC} = \frac{1}{12}\mathcal{B}$$



On a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{DOC} &= \mathcal{A}_{DMK} + \mathcal{A}_{KTC} + \mathcal{A}_{KMOT} \\
\frac{1}{A}\mathcal{B} &= \frac{1}{12}\mathcal{B} + \frac{1}{12}\mathcal{B} + \mathcal{A}_{KMOT} \\
\mathcal{A}_{KMOT} &= \frac{1}{4}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B} - \frac{1}{12}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{KMOT} &= \frac{3}{12}\mathcal{B} - \frac{2}{12}\mathcal{B} \\
\mathcal{A}_{KMOT} &= \frac{1}{12}\mathcal{B}
\end{aligned}$$

[13] Connue depuis le calcul n°1

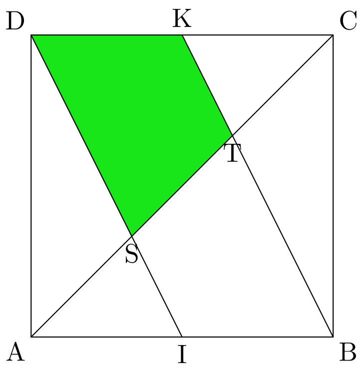
Classe de 4^e

- On découpe le triangle ADC en deux triangles ADS et KTC et un quadrilatère $DKTS$. On a alors

$$\mathcal{A}_{DKTS} = \mathcal{A}_{ADC} - (\mathcal{A}_{ADS} + \mathcal{A}_{KTC})$$

- Or, les triangles KTC et ASI ont la même aire donc

$$\mathcal{A}_{ADS} + \mathcal{A}_{KTC} = \mathcal{A}_{ADS} + \mathcal{A}_{ASI}$$
$$\mathcal{A}_{ADS} + \mathcal{A}_{KTC} = \mathcal{A}_{ADI}$$
$$\mathcal{A}_{ADS} + \mathcal{A}_{KTC} = \frac{1}{4}\mathcal{B}$$



Finalement,

$$\mathcal{A}_{DKTS} = \mathcal{A}_{ADC} - (\mathcal{A}_{ADS} + \mathcal{A}_{KTC})$$
$$\mathcal{A}_{DKTS} = \frac{1}{2}\mathcal{B} - \frac{1}{4}\mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}_{DKTS} = \frac{1}{4}\mathcal{B}$$