1 Définitions

Définition n°1

Soit a un nombre positif. On appelle *racine carrée* de a le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, tel que

$$\sqrt{a}^2 = a$$

Exemples

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{49} = 7$$

Propriété n°1

Soit a un nombre positif. Alors

$$\sqrt{a^2} = a$$

Exemples

$$\sqrt{6,5^2} = 6,5 \qquad \sqrt{\pi^2} = \pi$$

Applications

$$A = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$$
$$A = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2$$
$$A = 1 + 2\sqrt{3} + 3$$
$$A = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$B = \left(\sqrt{5} + \sqrt{7}\right) \times \left(\sqrt{5} - \sqrt{7}\right)$$
$$B = \sqrt{5}^2 - \sqrt{7}^2$$
$$B = 5 - 7$$
$$B = -2$$

Réduction d'expressions contenant des racines carrées.

$$A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \qquad B = \sqrt{3} - 5\sqrt{3}$$
$$A = (3+5)\sqrt{2} \qquad B = (1-5)\sqrt{3}$$
$$A = 8\sqrt{2} \qquad B = -4\sqrt{3}$$

2 Produit et quotient de racines carrées

Propriété n°2

- Soit a et b deux nombres positifs. Alors

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

- Soit a un nombre positif et b un nombre strictement positif. Alors

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples

$$A = \sqrt{50} \qquad B = \sqrt{48} \qquad C = \sqrt{\frac{75}{12}}$$
$$A = \sqrt{25 \times 2} \qquad B = \sqrt{16 \times 3} \qquad C = \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$A = \sqrt{25} \times \sqrt{2} \qquad B = \sqrt{16} \times \sqrt{3} \qquad C = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$$
$$A = 5\sqrt{2} \qquad B = 4\sqrt{3} \qquad C = \frac{5}{2}$$

Ces formules de calculs sur les racines carrées sont très intéressantes (surtout celle sur le produit) pour simplifier et réduire des expressions comportant des racines carrées.

Exemples

$$\begin{aligned}
A &= 3\sqrt{32} + 2\sqrt{18} & B &= 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} \\
A &= 3\sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{9 \times 2} & B &= 5\sqrt{4 \times 3} - 2\sqrt{25 \times 3} \\
A &= 3\sqrt{16} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{9} \times \sqrt{2} & B &= 5\sqrt{4} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{25} \times \sqrt{3} \\
A &= 3 \times 4 \times \sqrt{2} + 2 \times 3 \times \sqrt{2} & B &= 5 \times 2 \times \sqrt{3} - 2 \times 5 \times \sqrt{3} \\
A &= 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} & B &= 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} \\
A &= 18\sqrt{2} & B &= 0
\end{aligned}$$

3 L'équation « $X^2 = a$ »

Théorème n°1

Soit a un nombre quelconque et X une expression quelconque.
• Si a est un nombre positif alors l'équation $X^2 = a$ admet 2 solutions :

$$X = \sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad X = -\sqrt{a}$$

• Si a est nul alors l'équation $X^2 = 0$ admet 1 seule solution :

$$X = 0$$

Exemples

• *Résoudre l'équation* $x^2 = 8$.

Comme 8 est positif alors $x = \sqrt{8}$ et $x = -\sqrt{8}$.

Une autre façon de voir est d'écrire l'équation sous la forme $x^2 - 8 = 0$.

$$\begin{aligned}
x^2 &= 8 \\
x^2 - 8 &= 0 \\
(x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) &= 0
\end{aligned}$$

et on résoud l'équation-produit ainsi obtenue.

• *Résoudre l'équation* $(2x + 3)^2 = 10$.

Comme 10 est positif alors

$$2x+3=\sqrt{10} \qquad\qquad 2x+3=-\sqrt{10}$$
$$2x=\sqrt{10}-3 \qquad\qquad 2x=-\sqrt{10}-3$$
$$x=\frac{\sqrt{10}-3}{2} \qquad\qquad x=\frac{-\sqrt{10}-3}{2}$$

4 Exercices

• *Ecrire C sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a entier relatif et b entier le plus petit possible.*

$$\begin{aligned}
C &= 3\sqrt{20}-7\sqrt{5}+2\sqrt{125}\\
C &= 3\sqrt{4\times 5}-7\sqrt{5}+2\sqrt{25\times 5}\\
C &= 3\sqrt{4}\times\sqrt{5}-7\sqrt{5}+2\sqrt{25}\times\sqrt{5}\\
C &= 3\times 2\times\sqrt{5}-7\sqrt{5}+2\times 5\times\sqrt{5}\\
C &= 6\sqrt{5}-7\sqrt{5}+10\sqrt{5}\\
C &= 9\sqrt{5}
\end{aligned}$$

• *Simplifier les écritures des expressions E et F.*

$$\begin{aligned}
E &= 2\sqrt{27}+\sqrt{18}\times\sqrt{6}\\
E &= 2\sqrt{9\times 3}+\sqrt{6\times 3}\times\sqrt{6}\\
E &= 2\sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}\\
E &= 2\times 3\times\sqrt{3}+\sqrt{6}^2\times\sqrt{3}\\
E &= 6\sqrt{3}+6\sqrt{3}\\
E &= 12\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \left(\sqrt{2}-4\right)\left(2+4\sqrt{2}\right)\\
F &= 2\sqrt{2}+4\sqrt{2}^2-8-16\sqrt{2}\\
F &= 2\sqrt{2}+8-8-16\sqrt{2}\\
F &= -14\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Remarque : De manière générale (Théorème de Pythagore, calcul de longueurs dans un repère orthonormé,...), il faut penser à simplifier les écritures des racines carrées de manière à remarquer plus facilement des particularités. (Par exemple, pour dire que $5\sqrt{12}=2\sqrt{75}$.)