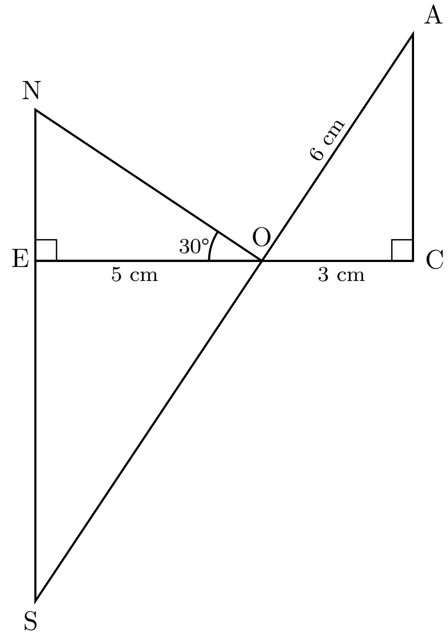
Devoir surveillé n° 4

3e C – Le mercredi 12/12/2007

Calculatrice autorisée – Pas de prêt ni d'échange de calculatrice !

■ Exercice 1.

Dans cet exerccie, on pourra utiliser les valeurs exactes indiquées en bas de page [1].
La figure ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur et n'est pas à reproduire.



Dans cette figure, on sait que :

- EO = 5 cm, OC = 3 cm et OA = 6 cm ;
- les points E, O et C sont alignés ;
- les triangles ENO et OCA sont respectivement rectangles en E et C ;
- la droite (AO) recoupe la droite (NE) en S.

1) Montrer que la longueur AC, en cm est $3\sqrt{3}$.

2) **a)** Montrer que les droites (NS) et (AC) sont parallèles.

b) Calculer les valeurs exactes de OS et ES.

3) Calculer la valeur exacte de ON, sachant que $\widehat{\text{NOE}}=30°$. Donner également la valeur approchée au mm.

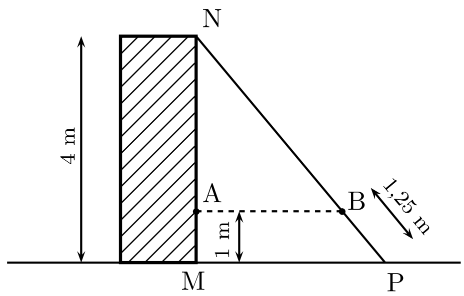
4) **a)** Calculer l'angle $\widehat{\text{COA}}$.

b) Démontrer que le triangle SON est rectangle.

■ Exercice 2.

Le croquis ci-contre représente une échelle [NP] de 5 m appuyée sur un mur (représenté hachuré) perpendiculaire au sol.

Le sommet N de l'échelle se trouve juste au sommet du mur. La hauteur du mur est de 4 m.



1) Calculer la distance MP entre le pied du mur et le pied de l'échelle.

2) L'inclinaison de l'échelle par rapport au sol horizontal est la mesure de l'angle $\widehat{\text{MPN}}$. Déterminer la valeur, arrondie au degré, de cette mesure.

3) Afin que l'échelle ne glisse pas sur le sol, on tend une corde entre un anneau A situé à 1 m de hauteur sur le mur, et un barreau B de l'échelle situé à $1,25$ m du bas de l'échelle (voir figure).

a) Calculer NA et NB.

b) La corde est-elle parallèle au sol ?

■ Exercice 3.

On donne l'expression littérale $A = 25-(3-2x)^2$

1) Développer et réduire A.

2) Factoriser A.

3) Calculer A lorsque $x=\sqrt{3}$, et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont des entiers relatifs.

■ Exercice 4.

1) α est un angle aigu tel que $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$
Calculer la valeur exacte de $\sin\alpha$ et en déduire celle de $\tan\alpha$.

2) x est un angle aigu. Exprimer plus simplement : $(\sin x+\cos x)^2-(\sin x-\cos x)^2$.

1. $\sin 30=\cos 60=\frac{1}{2}$ $\sin 45=\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 60=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan 45=1$ $\tan 60=\sqrt{3}$

Correction du devoir surveillé n^{o} 4

■ Exercice 1.

1) Le triangle OAC est rectangle en C, donc d'après le théorème de Pythagore :
$OA^2 = OC^2 + AC^2$
$6^2 = 3^2 + AC^2$
$AC^2 = 36 - 9 = 27 \qquad AC = \sqrt{27} = \sqrt{9}\sqrt{3} = \mathbf{3\sqrt{3}\ cm}$

2) **a)** Les droites (NS) et (AC) sont perpendiculaires à la même droite (EC) donc **(NS) est parallèle à (AC)**.

b) Les droites (AS) et (CE) se coupent en O, les droites (AC) et (SE) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{OA}{OS} = \dfrac{OC}{OE} = \dfrac{AC}{SE}$ ce qui donne $\dfrac{6}{OS} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{3\sqrt{3}}{ES}$

De l'égalité $\dfrac{6}{OS} = \dfrac{3}{5}$, on tire que $OS = \dfrac{6 \times 5}{3} = \dfrac{30}{3} = \mathbf{10\ cm}$

De l'égalité $\dfrac{3}{5} = \dfrac{3\sqrt{3}}{ES}$, on tire que $ES = \dfrac{5 \times \cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \mathbf{5\sqrt{3}\ cm}$

3) Dans le triangle NOE rectangle en E : $\cos\widehat{NOE} = \dfrac{OE}{ON} \qquad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5}{ON} \qquad ON = \dfrac{5 \times 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{10\sqrt{3}}}{\mathbf{3}} \approx \mathbf{5,8\ cm}$

4) **a)** Dans le triangle OAC, rectangle en C : $\cos\widehat{COA} = \dfrac{OC}{OA} \qquad \cos\widehat{COA} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, et donc $\mathbf{\widehat{COA} = 60}$

b) Les angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{EOS}$ sont opposés par le sommet donc égaux : $\widehat{EOS} = 60$

Et donc : $\widehat{NOS} = \widehat{NOE} + \widehat{EOS} = 30 + 60 = 90$: **Le triangle NOS est donc bien rectangle en O**.

■ Exercice 2.

1) Dans le triangle MNP rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore : $NP^2 = MN^2 + MP^2$
On obtient après calculs : $MP = \mathbf{3\ m}$

2) Dans le triangle MNP rectangle en M : $\sin\widehat{MPN} = \dfrac{MN}{NP} \qquad \sin\widehat{MPN} = \dfrac{4}{5} \qquad \mathbf{\widehat{MPN} \approx 53}$

3) **a)** $NA = NM - AM = 4 - 1 = \mathbf{3\ m} \qquad$ et $\qquad NB = NP - BP = 5 - 1,25 = \mathbf{3,75\ m}$

b) $\dfrac{NA}{NM} = \dfrac{3}{4} \qquad \dfrac{NB}{NP} = \dfrac{3,75}{5} = \dfrac{375}{500} = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4}$

On obtient l'égalité $\dfrac{NA}{NM} = \dfrac{NB}{NP}$, les points N, A, M et N, B, P sont alignés dans le même ordre, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (AB) et (MP) sont parallèles**. **La corde est bien parallèle au sol**.

■ Exercice 3.

1)
$A = 25 - (3 - 2x)^2$
$A = 25 - (9 - 12x + 4x^2)$
$A = 25 - 9 + 12x - 4x^2$
$\mathbf{A = -4x^2 + 12x + 16}$

2)
$A = 25 - (3 - 2x)^2$
$A = 5^2 - (3 - 2x)^2$
$A = [5 - (3 - 2x)][5 + (3 - 2x)]$
$A = (5 - 3 + 2x)(5 + 3 - 2x)$
$\mathbf{A = (2x + 2)(-2x + 8)}$

3)
$A = -4(\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{3} + 16$
$A = -4 \times 3 + 12\sqrt{3} + 16$
$A = -12 + 12\sqrt{3} + 16$
$\mathbf{A = 4 + 12\sqrt{3}}$

■ Exercice 4.

1) De la relation $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, on a :

$\sin^2\alpha + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{9}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{5}}}{\mathbf{3}}$

De la relation $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on a :

$\tan\alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}{\dfrac{2}{3}}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}}{2} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

2)
$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - (\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x)$
$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = \cancel{\sin^2 x} + 2\sin x\cos x + \cancel{\cos^2 x} - \cancel{\sin^2 x} + 2\sin x\cos x - \cancel{\cos^2 x}$
$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = \mathbf{4\sin x\cos x}$