Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4

Pour le vendredi 7/12/2007

■ Exercice 1.

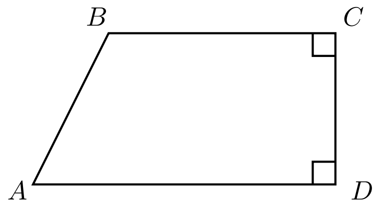
On appelle $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 6 cm.
A et B sont deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOB} = 50°$

1) Faire la figure en vraie grandeur.

2) Calculer au millimètre prés la longueur de la corde $[AB]$.
On pourra faire intervenir H, le milieu de la corde $[AB]$ et on justifiera soigneusement toutes les étapes.

■ Exercice 2.

Dans la figure ci-contre qui n'est pas représentée en vraie grandeur, $ABCD$ est un trapèze de bases $[BC]$ et $[AD]$, rectangle en C et D tel que :

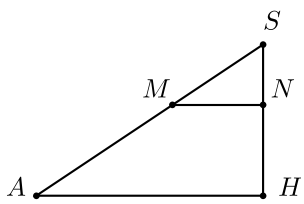


- $AD = 10$ cm
- $AB = 7$ cm
- $\widehat{BAD} = 70°$

Calculer au mm^2 près l'aire du trapèze $ABCD$.

■ Exercice 3.

La figure ci-contre représente la charpente d'un toit, vue en coupe.
Les données de l'architecte sont les suivantes :



- $[AS]$, $[AH]$, $[SH]$ et $[MN]$ sont des poutres rectilignes.
- $\widehat{SAH} = 40°$, $\widehat{SHA} = 90°$ et $\widehat{SNM} = 90°$
- $SA = 4,20$ m
- $SN = 1,20$ m

Vous êtes le charpentier du chantier, vous avez besoin de calculer au millimètre près les longueurs des poutres $[AH]$, $[SH]$ et $[MN]$. Vous justifierez vos calculs.

■ Problème.

On appelle A, B, C et D les 4 coins d'une feuille de papier de format A4 de telle sorte que $[AB]$ et $[DC]$ soient les grands côtés et $[AD]$ et $[BC]$ soient les petits côtés.

Les dimensions d'une feuille de format A4 sont de 21 cm par 29,7 cm.
Remarque : 29,7 est une valeur approchée de $21\sqrt{2}$. On considèrera donc que $AB = DC = 21\sqrt{2}$ cm.

On appelle I le milieu du côté $[DC]$.

Vous ferez une figure précise à l'échelle $\frac{1}{5}$, et vous déterminerez par le calcul, en détaillant et justifiant avec soin, si les segments $[AI]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires...

■ Énigmes de décembre.

Expliquez votre démarche, et donnez la solution de ces énigmes...

1) Une énorme comète se dirige directement vers la Terre !
Il y a deux jours, elle en était à 1 000 000 de km, hier à 100 000 km ; aujourd'hui, elle n'en est plus qu'à 10 000 km et les astronomes ont calculé que demain, il ne lui resterait plus que 1 000 km à parcourir avant de s'écraser sur notre planète !
En supposant que la comète poursuive sa route exactement à ce rythme, dans cette direction et ne rencontre pas d'obstacle, combien de temps reste-t-il avant qu'elle s'écrase sur la Terre ?

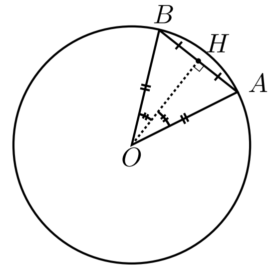
2) Quelle distance maximale peut-on parcourir avec une voiture disposant de 7 pneus neufs, sachant que chaque pneu peut faire 40 000 km ?

3) 3^2 est égal à 3×3 et vaut 9. De même, il est facile de calculer que $3^3 = 27$. Mais quel est le *chiffre* des unités de 3^{2007} ?

4) Sur une route longue de 50 km, 2 cyclistes faisant du 25 km/h partent à la rencontre l'un de l'autre. Une mouette, qui vole à 50 km/h va sans arrêt de l'un à l'autre. Quelle distance aura-t-elle parcouru lorsque les cyclistes se rejoindront ?

Correction du devoir maison n° 4

■ Exercice 1.



OAB est un triangle isocèle en O. Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est également hauteur, médiatrice de la base et bissectrice. Par conséquent, (OH) est la médiatrice de $[AB]$ (donc le triangle OAH est rectangle en H), et (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$: on a donc $\widehat{AOH} = 25°$

Dans le triangle AOH, rectangle en H : $\sin\widehat{AOH} = \dfrac{AH}{OA}$ $\quad \sin 25° = \dfrac{AH}{6}$

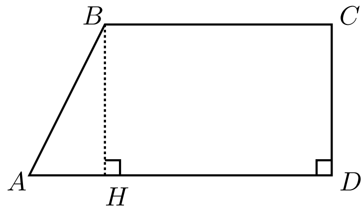
On obtient : $AH = 6 \times \sin 25°$ $\quad AB = 2 \times AH = 2 \times 6 \times \sin 25° \approx \mathbf{5,1\ cm}$

■ Exercice 2.

Soit H l'intersection avec (AD) de la perpendiculaire à (AD) passant par B. Le triangle ABH est rectangle en H, et :

$\sin\widehat{BAH} = \dfrac{BH}{AB}$ $\quad \sin 70° = \dfrac{BH}{7}$ $\quad BH = 7\sin 70°$

$\cos\widehat{BAH} = \dfrac{AH}{AB}$ $\quad \cos 70° = \dfrac{AH}{7}$ $\quad AH = 7\cos 70°$



Finalement :

$$\begin{aligned}\text{Aire}_{ABCD} &= \text{Aire}_{ABH} + \text{Aire}_{BCDH} = \frac{AH \times BH}{2} + HD \times BH \\ &= \frac{7\cos 70° \times 7\sin 70°}{2} + (10 - 7\cos 70°) \times 7\sin 70° \approx \mathbf{57,90\ cm^2}\end{aligned}$$

■ Exercice 3.

Dans le triangle SAH, rectangle en H :

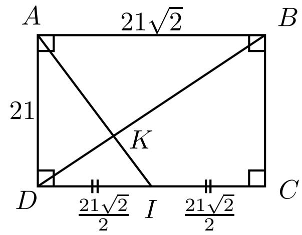
Calcul de AH : $\quad \cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA}$ $\quad \cos 40° = \dfrac{AH}{4,2}$ $\quad AH = 4,2\cos 40°$ $\quad AH \approx \mathbf{3,217\ m}$

Calcul de SH : $\quad \sin\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{SA}$ $\quad \sin 40° = \dfrac{SH}{4,2}$ $\quad SH = 4,2\sin 40°$ $\quad SH \approx \mathbf{2,700\ m}$

Les droites (AH) et (MN) sont perpendiculaires à la même droite (SH) donc elles sont parallèles. Les angles $\widehat{SAH}$ et $\widehat{SMN}$ sont correspondants. Comme $(AH)//(MN)$, ces angles correspondants sont égaux, et donc : $\widehat{SMN} = 40°$.

Dans le triangle SMN, rectangle en N : $\tan\widehat{SMN} = \dfrac{SN}{MN}$ $\quad \tan 40° = \dfrac{1,2}{MN}$ $\quad MN = \dfrac{1,2}{\tan 40°}$ $\quad AH \approx \mathbf{1,430\ m}$

■ Problème.



- Dans le triangle ADI, rectangle en D :
  $\tan\widehat{DIA} = \dfrac{AD}{ID} = \dfrac{\cancel{21}}{\cancel{21}\sqrt{2}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}/2}$ $\quad \widehat{DIA} \approx 54,74°$
- Dans le triangle DBC, rectangle en C :
  $\tan\widehat{BDC} = \dfrac{BC}{DC} = \dfrac{\cancel{21}}{\cancel{21}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \widehat{DBC} \approx 35,26°$

Par ailleurs, la somme des angles du triangle DKI vaut 180° donc
$\widehat{DKI} = 180 - 54,74 - 35,26 = 90°$

Cela prouve donc que **les segments $[DB]$ et $[AI]$ sont perpendiculaires**

■ Énigmes de décembre.

1) La comète parcourt chaque jour $\frac{9}{10}$ ce qui lui restait à parcourir la veille, et il lui reste $\frac{1}{10}$ à parcourir le lendemain. Bien que diminuant (puisqu'elle est divisée par 10 chaque jour), cette distance ne sera jamais nulle. **La comète n'atteindra jamais la terre, mais elle s'en rapprochera infiniment**.

2) En numérotant les pneus de 1 à 7, **on peut parcourir 70 000 km** par tranche de 10 000 km : 1234 - 5234 - 6234 - 7234 et 3 fois 1567.

3) Examinons les neuf premières puissances de 3 :
$3^1 = \mathbf{3}$ $\quad 3^2 = \mathbf{9}$ $\quad 3^3 = 2\mathbf{7}$ $\quad 3^4 = 8\mathbf{1}$ $\quad 3^5 = 24\mathbf{3}$ $\quad 3^6 = 72\mathbf{9}$ $\quad 3^7 = 218\mathbf{7}$ $\quad 3^8 = 656\mathbf{1}$ $\quad 3^9 = 1968\mathbf{3}$.
On constate que la suite des 4 chiffres 3 9 7 1 revient périodiquement au chiffre des unités. Il faut donc examiner le reste de la division de 2007 par 4 : on trouve 3. Par conséquent, le chiffre des unités de 3^{2007} est **7**.

4) Les 2 cyclisyes ont 25 km à parcourir, ils roulent donc pendant 1h. Pendant ce temps, la mouette parcourt **50 km**.