Devoir maison n$^{\text{o}}$ 3

Pour le vendredi 16/11/2007

■ Exercice 1.

1) Écrire ces nombres sous la forme $m\sqrt{n}$ où m est un entier relatif, et n est un entier le plus petit possible :

$a = 5\sqrt{12} - 6\sqrt{27} + 3\sqrt{48}$ $\qquad b = 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{15}$ $\qquad c = \sqrt{98} - \sqrt{200} + \sqrt{50}$

$d = \dfrac{3\sqrt{14} \times \sqrt{28} \times \sqrt{15}}{\sqrt{6} \times \sqrt{21} \times 2\sqrt{7}}$ $\qquad e = -\sqrt{80} + 4\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$ $\qquad f = 3\sqrt{24} \div \sqrt{18} \times \sqrt{15} \div \sqrt{10}$

2) Développer et réduire, puis donner le résultat sous la forme la plus simple :

$h = \left(2\sqrt{3} + 1\right)^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$ $\qquad i = \left(8\sqrt{7} + 21\right)\left(8 - 3\sqrt{7}\right)$ $\qquad j = \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{6}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

■ Exercice 2.

Montrer par le calcul et en détaillant les étapes que ces nombres sont égaux :

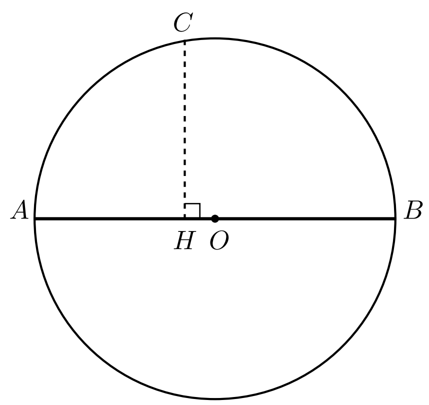
$a = 3\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{128}$ $\qquad b = \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$ $\qquad c = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3} + 2\right)$ $\qquad d = \dfrac{\sqrt{54} - \sqrt{24}}{\sqrt{48} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27}}$

■ Problème.

Dans ce problème, on donnera les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

La figure ci-contre n'est pas à l'échelle, et ne sert qu'à indiquer la disposition des points de ce problème :

- $[AB]$ est un segment tel que $AB = 14$ cm.
- H est le point de $[AB]$ tel que $AH = 6$ cm.
- La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en C.
- On appelle O le centre du cercle.



1) Tracer la figure en vraie grandeur, et la compléter par la suite.

2) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

3) Calculer la valeur exacte de la longueur CH.

4) Calculer la valeur exacte de la longueur AC.

5) En déduire finalement par le calcul que $BC = 4\sqrt{7}$ cm.

6) On s'intéresse au triangle COB, et on appelle H_1 le pied de la hauteur issue de O.

a) Calculer l'aire du triangle COB. Donner le résultat sous la forme $e\sqrt{3}$ où e est un entier.

b) Calculer la valeur exacte de la longueur OH_1.

■ Énigmes de novembre.

1) Maxime est content, il a compris sa leçon sur les aires.
Sur son cahier, il sait que s'il trace un rectangle de 3 carreaux de long sur 2 carreaux de large, l'aire de son rectangle mesure 6 « carreaux unités », ça veut dire que son rectangle contient 6 carreaux de son cahier. Mais son professeur (ce vieux sournois) lui demande de construire un carré dont l'aire mesure 5 carreaux unités ! Pouvez-vous l'aider et lui indiquer une construction ?

2) Je suis sur la surface du globe terrestre et je m'y déplace : je fais 1 000 km vers le sud, puis 1 000 km vers l'est, puis 1 000 km vers le nord. Je me retrouve à mon point de départ. À part au pôle nord qui est une solution évidente, où se trouve donc mon point de départ ?

3) Trouverez-vous une figure ou un objet quelconque ayant à la fois un centre de symétrie, et un nombre impair d'axe(s) de symétrie ?

4) Dans une classe de troisième, 5/8 des filles et 2/3 des garçons aiment les maths. Nicolas et Marie sont les seuls redoublants. 68% exactement des élèves ont les cheveux châtain, et 3 élèves viennent au collège en vélo. Combien y a t-il d'élèves dans cette classe ?

Correction du devoir maison n° 3

■ Exercice 1

1)

$a = 5\sqrt{12} - 6\sqrt{27} + 3\sqrt{48}$
$a = 5\sqrt{4}\sqrt{3} - 6\sqrt{9}\sqrt{3} + 3\sqrt{16}\sqrt{3}$
$a = 10\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 12\sqrt{3}$
$\boldsymbol{a = 4\sqrt{3}}$

$b = 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{15}$
$b = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}\sqrt{5}$
$b = 2 \times 3 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 \times \sqrt{3}$
$b = 2 \times 3 \times 2 \times 5\sqrt{3}$
$\boldsymbol{b = 60\sqrt{3}}$

$c = \sqrt{98} - \sqrt{200} + \sqrt{50}$
$c = \sqrt{49}\sqrt{2} - \sqrt{100}\sqrt{2} + \sqrt{25}\sqrt{2}$
$c = 7\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
$\boldsymbol{c = 2\sqrt{2}}$

$$d = \frac{3\sqrt{14} \times \sqrt{28} \times \sqrt{15}}{\sqrt{6} \times \sqrt{21} \times 2\sqrt{7}}$$
$$d = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{7} \times \sqrt{4}\sqrt{7} \times \sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{3} \times \sqrt{3}\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}}$$
$$d = \frac{3 \times \left(\sqrt{7}\right)^2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 \times \left(\sqrt{7}\right)^2 \times 2\sqrt{2}}$$
$$d = \frac{\cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{2} \times \cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{2} \times \cancel{\sqrt{2}}}$$
$\boldsymbol{d = \sqrt{15}}$

$e = -\sqrt{80} + 4\sqrt{125} - 7\sqrt{45}$
$e = -\sqrt{16}\sqrt{5} + 4\sqrt{25}\sqrt{5} - 7\sqrt{9}\sqrt{5}$
$e = -4\sqrt{5} + 20\sqrt{5} - 21\sqrt{5}$
$\boldsymbol{e = -5\sqrt{5}}$

$f = 3\sqrt{24} \div \sqrt{18} \times \sqrt{15} \div \sqrt{10}$
$$f = 3\sqrt{\frac{24}{18}} \times \sqrt{\frac{15}{10}}$$
$$f = 3\sqrt{\frac{\cancel{6} \times 4}{\cancel{6} \times 3} \times \frac{\cancel{5} \times 3}{\cancel{5} \times 2}}$$
$$f = 3\sqrt{\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}}$$
$$f = 3\sqrt{\frac{\cancel{2} \times 2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}}$$
$\boldsymbol{f = 3\sqrt{2}}$

2)

$h = \left(2\sqrt{3} + 1\right)^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$
$h = 4(\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} + 1 - (4 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2)$
$h = 12 + \cancel{4\sqrt{3}} + 1 - 4 - \cancel{4\sqrt{3}} - 3$
$\boldsymbol{h = 6}$

$i = \left(8\sqrt{7} + 21\right)\left(8 - 3\sqrt{7}\right)$
$i = 64\sqrt{7} - 24(\sqrt{7})^2 + 168 - 63\sqrt{7}$
$i = 64\sqrt{7} - \cancel{168} + \cancel{168} - 63\sqrt{7}$
$\boldsymbol{i = \sqrt{7}}$

$j = \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{6}\left(1 - \sqrt{2}\right)$
$j = \sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{12}$
$j = \sqrt{3} + \cancel{2\sqrt{6}} - \cancel{2\sqrt{6}} + 2\sqrt{4}\sqrt{3}$
$j = \boldsymbol{5\sqrt{3}}$

■ Exercice 2

$a = 3\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{128}$
$a = 3\sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{9}\sqrt{2} - \sqrt{64}\sqrt{2}$
$a = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$
$\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$

$b = \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$
$b = 2\sqrt{2} + 2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}$
$b = 2\sqrt{2} + \cancel{2} - \cancel{2} - \sqrt{2}$
$\boldsymbol{b = \sqrt{2}}$

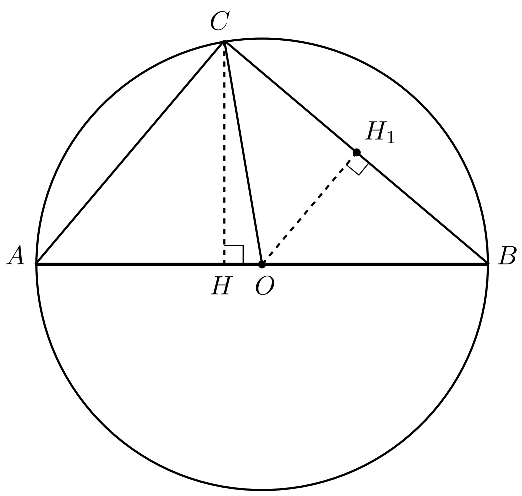
$c = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3} + 2\right)$
$c = \cancel{2\sqrt{6}} + 4\sqrt{2} - \sqrt{18} - \cancel{2\sqrt{6}}$
$c = 4\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{2}$
$c = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
$\boldsymbol{c = \sqrt{2}}$

$$d = \frac{\sqrt{54} - \sqrt{24}}{\sqrt{48} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27}}$$
$$d = \frac{\sqrt{9}\sqrt{6} - \sqrt{4}\sqrt{6}}{\sqrt{16}\sqrt{3} - 3\sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3}}$$
$$d = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}$$
$$d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$
$$d = \frac{\sqrt{2} \times \cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}$$
$\boldsymbol{d = \sqrt{2}}$

Tous ces nombres sont égaux à $\sqrt{2}$: on obtient bien $\boldsymbol{a = b = c = d}$.

■ Problème

1) Voir figure ci-dessous.



2) Le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ donc le triangle ABC est rectangle en C.

3) Dans le triangle OCH, rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} OC^2 &= OH^2 + CH^2 \\ 7^2 &= 1^2 + CH^2 \\ CH^2 &= 49 - 1 = 48 \\ CH &= \sqrt{48} = \sqrt{16}\sqrt{3} \\ CH &= \mathbf{4\sqrt{3}\ cm} \end{aligned}$$

4) Dans le triangle ACH, rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + CH^2 \\ AC^2 &= 6^2 + 48 \\ AC^2 &= 84 \\ AC &= \sqrt{84} = \sqrt{4}\sqrt{21} \\ AC &= \mathbf{2\sqrt{21}\ cm} \end{aligned}$$

5) Dans le triangle ABC, rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ 14^2 &= 84 + BC^2 \\ BC^2 &= 14^2 - 84 = 112 \\ BC &= \sqrt{112} = \sqrt{16}\sqrt{7} \\ BC &= \mathbf{4\sqrt{7}\ cm} \end{aligned}$$

6) **a)** $\text{Aire}_{COB} = \dfrac{OB \times CH}{2} = \dfrac{7 \times 4\sqrt{3}}{2} = \dfrac{28\sqrt{3}}{2} = \mathbf{14\sqrt{3}\ cm^2}$

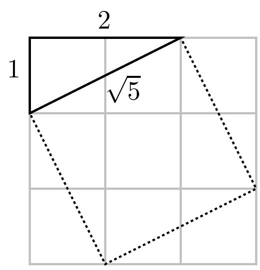
b) Mais aussi : $\text{Aire}_{COB} = \dfrac{BC \times OH_1}{2} = \dfrac{4\sqrt{7} \times OH_1}{2} = 2\sqrt{7} \times OH_1$

On a donc l'égalité : $2\sqrt{7} \times OH_1 = 14\sqrt{3}$.

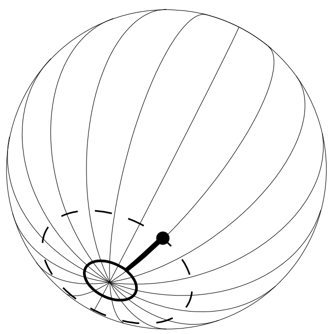
On en tire que $OH_1 = \dfrac{14\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\cancel{2} \times 7\sqrt{3}}{\cancel{2}\sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\cancel{7}\sqrt{21}}{\cancel{(\sqrt{7})^2}} = \mathbf{\sqrt{21}\ cm}$.

■ Énigmes de novembre

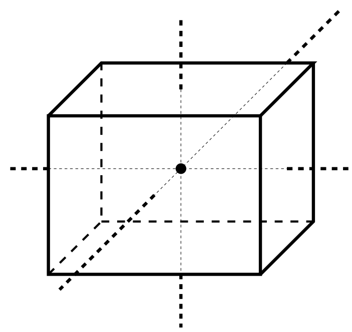
1) Maxime doit construire un carré de coté $\sqrt{5}$ carreaux, comme ça l'aire sera bien de $(\sqrt{5})^2 = 5$ « carreaux unité ».
Il lui faut donc auparavant un segment de longueur $\sqrt{5}$ carreau : il suffit de dessiner un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires mesurent 1 carreau et 2 carreaux. Avec le théorème de Pythagore, on calcule que l'hypoténuse de ce rectangle mesure $\sqrt{5}$ carreau.
Il ne reste plus à Maxime qu'à compléter le carré en partant du segment de longueur $\sqrt{5}$: ça, c'est facile !



2) **Je suis quelque part sur la ligne pointillée** (voir figure), située à 1 000 km au nord du parallèle qui mesure 1 000 km de circonférence. On peut aussi se placer à 1 000 km au nord des parallèles dont la circonférence fait 500 km ou 250 km ou 125 km, etc.



3) Un **pavé droit non cubique** a 1 centre de symétrie et 3 axes de symétrie.



4) Le seul nombre important ici est 68%. En effet, $68\% = \dfrac{68}{100} = \dfrac{17}{25}$
L'effectif de la classe doit donc être un multiple de 25 pour que 68% de l'effectif de la classe soit un nombre entier d'élèves. Si l'on prend 25 élèves, on peut ensuite vérifier que c'est valable en prenant 16 garçons et 9 filles : $\frac{5}{8} \times 16 = 10$ (est un entier : garçons qui aiment les maths), et $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ (est également un entier : filles qui aiment les maths).
Il y a donc 25 élèves dans la classe (car 50, 75, etc. bien que mathématiquement valables sont des effectifs bien trop importants).