Devoir maison n° 5

Pour le lundi 7/01/2008

■ Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes :

$(2x-3)^2-(2x-1)(2x+3)=0$ $\qquad x\sqrt{2}+1=2x\sqrt{2}-5$ $\qquad \dfrac{x}{2}-\dfrac{2x-5}{3}=1$ $\qquad \dfrac{x+2\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}$

■ Exercice 2.

Dans mon porte monnaie, j'ai des pièces de 20 centimes et des pièces de 10 centimes. J'ai 30 pièces pour un total de 5,30€.

Combien de pièces de chaque valeur y a t-il dans mon porte monnaie ?

■ Exercice 3.

Un rectangle a un périmètre de 58 cm.
Si l'on augmente la largeur de 1 cm et que l'on diminue la longueur de 2 cm, l'aire reste inchangée.

Quelles sont les dimensions initiales de ce rectangle ?

■ Exercice 4.

ABCD est un rectangle tel que : AB = DC = 9 cm AD = BC = 5 cm
M est un point du segment [AB], et on appelle x la longueur AM.

1) Calculer en fonction de x les aires du triangle BMC et du trapèze AMCD.

2) Pour quelle valeur de x l'aire du trapèze AMCD vaut-elle le double de celle du triangle BMC ?

■ Exercice 5.

Soit l'expression littérale suivante : $\text{A}=4x^2-4x+1-(2x-1)(3x-2)$

1) Développer et réduire A.

2) Factoriser $4x^2-4x+1$, et en déduire la factorisation de A.

3) Résoudre l'équation $\text{A}=0$

4) Calculer la valeur de A lorsque $x=-5$. Donner également l'écriture scientifique du résultat.

■ Exercice 6.

Le but de cet exercice est de calculer la valeur exacte de $\sin 15°$

Dans la figure ci-dessous qui n'est pas représentée en vraie grandeur, ABC est un triangle équilatéral de côté 2 cm pour lequel [AH] est une médiatrice, BCD est un triangle rectangle isocèle en D, et K est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD.
On admet que le point D appartient au segment [AH].

1) **a)** Calculer les valeurs exactes des longueurs BD, DH, AH et AD.

b) En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle ABD.

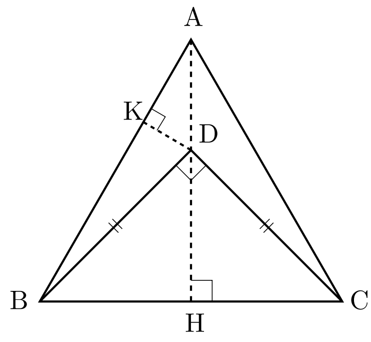
2) Dans cette question, on *n'utilisera pas* les résultats de la question 1.

a) En justifiant votre réponse, donner la mesure de l'angle $\widehat{\text{ABD}}$.

b) Démontrer que $\text{KD}=\sqrt{2}\times\sin 15°$

c) Déduire de la question précédente, l'expression de l'aire du triangle ABD en fonction de $\sin 15°$.

3) Démontrer que $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



■ Énigmes de Noël.

1) L'air chaud, plus léger que l'air froid, monte.
Comment expliquer alors qu'il fasse plus froid en haut des montagnes qu'en bas ?

2) Lorsque l'on ajoute du sel dans de l'eau ou de la glace, cela fait baisser la température.
Comment expliquer alors que l'on mette du sel sur les routes pour éviter le gel ?

3) La voyante réputée Inès Kroquerie peut répondre avec exactitude à n'importe quelle question concernant les évènements futurs. Trouverez-vous une question simple sur un évènement futur à laquelle la voyante ne peut nécessairement pas répondre ?

4) Compléter logiquement les «?» dans cette série : A3 M4 T2 K3 Z3 V? ?1 E?

Correction du devoir maison n^{o} 5

■ Exercice 1.

$$(2x-3)^2-(2x-1)(2x+3)=0$$
$$4x^2-12x+9-(4x^2+6x-2x-3)=0$$
$$\cancel{4x^2}-12x+9-\cancel{4x^2}-6x+2x+3=0$$
$$-12-6x+2x=-9-3$$
$$-16x=-12$$
$$x=\frac{-12}{-16}$$
$$\boldsymbol{x=\frac{3}{4}}$$

$$x\sqrt{2}+1=2x\sqrt{2}-5$$
$$x\sqrt{2}-2x\sqrt{2}=-5-1$$
$$-x\sqrt{2}=-6$$
$$x=\frac{-6}{-\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}$$
$$x=\frac{6\sqrt{2}}{2}$$
$$\boldsymbol{x=3\sqrt{2}}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2x-5}{3}=1$$
$$\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}=1$$
$$\frac{3x}{6}-\frac{4x}{6}=\frac{3}{3}-\frac{5}{3}$$
$$-\frac{x}{6}=-\frac{2}{3}$$
$$x=\frac{2\times 6}{3}$$
$$\boldsymbol{x=4}$$

$$\frac{x+2\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}$$
$$x+2\sqrt{2}=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$$
$$x+2\sqrt{2}=2x-\sqrt{2}$$
$$x-2x=-\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$
$$-x=-3\sqrt{2}$$
$$\boldsymbol{x=3\sqrt{2}}$$

■ Exercice 2.

On pose par exemple x le nombre de pièces de 20 centimes ($x>0$) : cela représente $20x$ centimes.
Dans ce cas, comme il y a 30 pièces, j'ai $30-x$ pièces de 10 centimes : cela représente $10(30-x)$ centimes.

On obtient l'équation du 1$^{\text{er}}$ degré en écrivant que la somme que représente toutes ces pièces vaut 530 centimes : $20x+10(30-x)=530$

On obtient facilement $x=23$, et donc **j'ai 23 pièces de 20 centimes et 7 pièces de 10 centimes**.

■ Exercice 3.

Appelons par exemple a la largeur de ce rectangle. Comme le périmètre vaut 58 cm, alors la longueur vaut $\frac{58-2a}{2}$ c'est-à-dire $29-a$.

On a donc le tableau suivant :

	initial	après changements
largeur	a	$a+1$
longueur	$29-a$	$29-a-2$

En écrivant la conservation des aires, on a l'équation suivante : $a(29-a)=(a+1)(27-a)$
On la résout aisément, et on trouve $a=9$.

Par conséquent, **le rectangle initial a pour largeur 9 cm et pour longueur 20 cm**.

■ Exercice 4.

1) $\text{Aire}_{\text{BMC}}=\frac{\text{BC}\times\text{BM}}{2}=\boldsymbol{\frac{5(9-x)}{2}}$ **cm²**

$\text{Aire}_{\text{AMCD}}=\text{Aire}_{\text{rectangle}}-\text{Aire}_{\text{BMC}}=\boldsymbol{45-\frac{5(9-x)}{2}}$ **cm²**

2) Il suffit de résoudre $\text{Aire}_{\text{AMCD}}=2\times\text{Aire}_{\text{BMC}}$ c'est -à-dire $45-\frac{5(9-x)}{2}=2\times\frac{5(9-x)}{2}$

Cette équation devient $45=\frac{3\times 5\times(9-x)}{2}$

On la résout classiquement en écrivant l'égalité des produits en croix.

On trouve $x=3$. Et donc, **lorsque $\boldsymbol{x=3}$ cm, l'aire de AMCD est le double de l'aire du BMC**.

■ Exercice 5.

1)

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 - 4x + 1 - (2x-1)(3x-2) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 - (6x^2 - 4x - 3x + 2) \\ &= 4x^2 - 4x + 1 - 6x^2 + 4x + 3x - 2 \\ &= \mathbf{-2x^2 + 3x - 1} \end{aligned}$$

2) $4x^2 - 4x + 1$ est le développement d'une identité remarquable, et on a : $4x^2 - 4x + 1 = \mathbf{(2x-1)^2}$

On peut donc écrire A sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= (2x-1)^2 - (2x-1)(3x-2) \\ &= (2x-1)(2x-1) - (2x-1)(3x-2) \\ &= (2x-1)[(2x-1) - (3x-2)] \\ &= (2x-1)(2x - 1 - 3x + 2) \\ &= \mathbf{(2x-1)(-x+1)} \end{aligned}$$

3) On utilise l'expression factorisée pour obtenir une équation-produit.

$$(2x-1)(-x+1) = 0$$

$$\begin{array}{lcr} 2x - 1 = 0 & \text{ou} & -x + 1 = 0 \\ 2x = 1 & \text{ou} & -x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} & \text{ou} & x = 1 \end{array}$$

Les solutions sont donc $\mathbf{\frac{1}{2}}$ et 1.

4) On prend l'expression factorisée, et

$A = (2 \times (-5) - 1) \times (-(-5) + 1) = -11 \times 6 = \mathbf{-66}$

$A = \mathbf{-6,6 \times 10^1}$

■ Exercice 6.

1) a) Le triangle BDC étant rectangle isocèle en D, $\widehat{DBC} = 45°$. Par conséquent, le triangle BDH est également rectangle isocèle en H, et donc **DH = BH = 1 cm**.

Dans le triangle DBH rectangle en H, avec le théorème de Pythagore, on trouve que $\mathbf{BD = \sqrt{2}}$ **cm**.

Dans le triangle ABH rectangle en H, avec le théorème de Pythagore, on trouve que $\mathbf{AH = \sqrt{3}}$ **cm**.

Par soustraction, AD = AH − DH, on a $\mathbf{AD = \sqrt{3} - 1}$ **cm**.

b) $\text{Aire}_{\text{ABD}} = \dfrac{AD \times BH}{2} = \dfrac{(\sqrt{3}-1) \times 1}{2} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ $\mathbf{cm^2}$

2) a) Le triangle ABC étant équilatéral, $\widehat{ABC} = 60°$. Le triangle BCD étant rectangle isocèle en D, $\widehat{DBC} = 45°$.

Par conséquent, $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} - \widehat{DBC} = 60 - 45 = \mathbf{15°}$.

b) Dans le triangle BKD rectangle en K : $\sin\widehat{KBD} = \dfrac{KD}{BD}$ et donc $\sin 15° = \dfrac{KD}{\sqrt{2}}$.

On a bien $\mathbf{KD = \sqrt{2} \times \sin 15°}$

c) $\text{Aire}_{\text{ABD}} = \dfrac{AB \times KD}{2} = \dfrac{\cancel{2} \times \sqrt{2}\sin 15°}{\cancel{2}} = \mathbf{\sqrt{2} \times \sin 15°}$ $\mathbf{cm^2}$

3) On a trouvé aux questions 1b et 2c, deux façons différentes d'exprimer l'aire du triangle ABD.

On peut écrire qu'elles sont égales, et on a : $\sqrt{2} \times \sin 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

On obtient alors : $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

■ Énigmes de Noël.

1) Plusieurs facteurs interviennent dans ce paradoxe, dont certains sont très complexes.

L'air chaud qui est plus léger que l'air froid, a tendance à monter. En montant, il se dilate puisque la pression diminue. Et lorsqu'un gaz se dilate, sa température diminue. On dit que l'air a subit une *dilatation adiabatique*[1].

2) Lorsqu'on ajoute du sel sur de la glace, la température diminue mais le point de congélation diminue encore plus : pour environ 23% de sel[2] dans l'eau, le mélange eau-sel ne gèle qu'à −21 °C !

Faire des recherches sur google avec "`Sel routes`" ou consulter

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Glace#Fusion_eutectique`

3) La voyante ne peut répondre à cette question : « Votre prochaine réponse sera t-elle : "Non" ? »

4) Après chaque lettre figure le nombre de segment(s) nécessaire(s) pour la tracer.

La suite complète est donc : A3 M4 T2 K3 Z3 V**2** **I**1 E**4**

---

1. « Adiabatique » signifie sans échange de chaleur.
2. Cette proportion est énorme, et n'est jamais atteinte sur les routes. Malgré des proportions de sel moins importantes, le salage des routes est une source non négligeable de pollution en France. D'ailleurs, le salage est-il vraiment nécessaire ?